1（５０点）

【解答・採点基準】

$$\begin{cases} 2^{B(n)-1} \leqq n < 2^{B(n)} \\ 3^{T(n)-1} \leqq n < 3^{T(n)} \end{cases}$$

である。$B(n)+T(n)$ が偶数となるのは，$B(n)$ と $T(n)$ の偶奇が一致するときである。

[1] $B(n), T(n)$ がともに偶数になるとき

$B(n)$ が偶数となるのは，$2^{10} < 2022 < 2^{11}$ より，

$$2^1 \leqq n < 2^2,\ 2^3 \leqq n < 2^4,\ 2^5 \leqq n < 2^6,$$
$$2^7 \leqq n < 2^8,\ 2^9 \leqq n < 2^{10}$$

$$\Leftrightarrow 2 \leqq n < 4,\ 8 \leqq n < 16,\ 32 \leqq n < 64,$$

$$128 \leqq n < 256,\ 512 \leqq n < 1024 \quad ・・・①$$

となるときであり，$T(n)$ が偶数となるのは，$3^6 < 2022 < 3^7$ より，

$$3^1 \leqq n < 3^2,\ 3^3 \leqq n < 3^4,\ 3^5 \leqq n < 3^6$$

$$\Leftrightarrow 3 \leqq n < 9,\ 27 \leqq n < 81,\ 243 \leqq n < 729 \quad ・・・②$$

となるときである。よって，条件を満たすのは

①かつ②

$$\Leftrightarrow 3 \leqq n < 4,\ 8 \leqq n < 9,\ 32 \leqq n < 64,$$

$$243 \leqq n < 256,\ 512 \leqq n < 729$$

のときである。

[2] $B(n), T(n)$ がともに奇数になるとき

[1]と同様にして，$B(n)$ が奇数となるのは，

$$2^0 \leqq n < 2^1,\ 2^2 \leqq n < 2^3,\ 2^4 \leqq n < 2^5,\ 2^6 \leqq n < 2^7,$$
$$2^8 \leqq n < 2^9,\ 2^{10} \leqq n \leqq 2022$$

$$\Leftrightarrow 1 \leqq n < 2,\ 4 \leqq n < 8,\ 16 \leqq n < 32,\ 64 \leqq n < 128,$$

$$256 \leqq n < 512,\ 1024 \leqq n \leqq 2022 \quad ・・・③$$

となるときであり，$T(n)$ が奇数となるのは，

$$3^0 \leqq n < 3^1,\ 3^2 \leqq n < 3^3,\ 3^4 \leqq n < 3^5,\ 3^6 \leqq n \leqq 2022$$

$$\Leftrightarrow 1 \leqq n < 3,\ 9 \leqq n < 27,$$

$$81 \leqq n < 243,\ 729 \leqq n \leqq 2022 \quad ・・・④$$

50 点

n と $B(n), T(n)$ の関係式・・10 点（各 5 点×2）

[1]，[2]の場合分けの方針・・10 点

[1]の場合の n の値の範囲・・10 点

となるときである。よって，条件を満たすのは

③かつ④

$\Leftrightarrow 1 \leqq n < 2$，$16 \leqq n < 27$，$81 \leqq n < 128$，$1024 \leqq n \leqq 2022$

のときである。

[2]の場合の n の値の範囲・・10 点

以上, [1], [2]より，求める正の整数 n の個数は

$$(4-3)+(9-8)+(64-32)+(256-243)+(729-512)$$
$$+(2-1)+(27-16)+(128-81)+(2022-1024+1)$$

$=1322$ (個)

である。

(答) 1322 個

答・・10 点

[別解]

[別解] 50 点

$n=1, 2, 3, \cdots$ としたときの $B(n)$ の変化を考えると，$n=2^k$ (ただし k は正の整数)となるときのみ $B(n)$ が1増加して，それ以外の場合では $B(n)$ は変化しない。同様に，$n=3^l$ (ただし l は正の整数)となるときのみ $T(n)$ が1増加して，それ以外の場合では $T(n)$ は変化しない。ここで，2 と 3 は互いに素であるから，$2^k=3^l$ となる (k, l) は存在しない。したがって，$n=2^k$ または $n=3^l$ となるときのみ $B(n)+T(n)$ が1増加して，それ以外の場合では $B(n)+T(n)$ は変化しない。

n に対する $B(n), T(n)$ の変化・・10 点(各 5 点×2)

n に対する $B(n)+T(n)$ の変化・・10 点

$$2^1=2,\ 2^2=4,\ 2^3=8,\ 2^4=16,\ 2^5=32,\ 2^6=64,$$
$$2^7=128,\ 2^8=256,\ 2^9=512,\ 2^{10}=1024,\ 2^{11}=2048$$

$$3^1=3,\ 3^2=9,\ 3^3=27,\ 3^4=81,\ 3^5=243,\ 3^6=729,\ 3^7=2187$$

であるから，$n=2^k$ または $n=3^l$ となる 2022 以下の n を小さい順に並べると

2, 3, 4, 8, 9, 16, 27, 32, 64, 81, 128, 243, 256, 512, 729, 1024

となる。$B(1)+T(1)=1+1=2$ であるから，

昇順に並び替え・・10 点

$$1 \leqq n < 2,\ 3 \leqq n < 4,\ 8 \leqq n < 9,\ 16 \leqq n < 27,\ 32 \leqq n < 64,$$
$$81 \leqq n < 128,\ 243 \leqq n < 256,\ 512 \leqq n < 729,\ 1024 \leqq n \leqq 2022$$

n の値の範囲・・10 点

のときに，それぞれ $B(n)+T(n)=2, 4, 6, \cdots$ となり条件を満たす。

したがって，求める正の整数 n の個数は

$$(2-1)+(4-3)+(9-8)+(27-16)+(64-32)$$
$$+(128-81)+(256-243)+(729-512)+(2022-1024+1)$$

$=1322$ (個)

である。

(答) 1322 個

答・・10 点