２０２３年　第一回一橋大本番レベル模試・数学

解答・解説・採点基準

全５問　１２０分　２５０点満点

Ｉ　（５０点）

(1)

$n=p^2q$ の正の約数の総和は $(1+p+p^2)(1+q)$ と表されるから，

$$(1+p+p^2)(1+q)=2p^2q \quad ・・・①$$

が成立する。ここで，$1+p+p^2=1+p(p+1)$ より $1+p+p^2$ は p の倍数でない。また，連続する 2 整数の積 $p(p+1)$ は偶数であるから，$1+p+p^2$ は奇数である。したがって，①より $1+q=2p^2k$ (k は正の整数)と表すことができ，

$$(1+p+p^2)\cdot 2p^2k=2p^2q$$
$$\Leftrightarrow q=(1+p+p^2)\cdot k \ (\because p\neq 0)$$

となるが，q が素数であることより $k=1$ を得る。よって $1+q=2p^2$ に $q=1+p+p^2$ を代入して

$$2+p+p^2=2p^2$$
$$\Leftrightarrow p^2-p-2=0$$
$$\Leftrightarrow (p+1)(p-2)=0$$
$$\therefore p=2 \ (\because p>0)$$

と求まり，このとき $q=7$ である。これは p, q が素数であることを満たす。ゆえに $n=28$ である。

(答)　$n=28$

(1)[別解]

$n=p^2q$ の正の約数の総和は $(1+p+p^2)(1+q)$ と表されるから，

$$(1+p+p^2)(1+q)=2p^2q$$
$$\Leftrightarrow q(p^2-p-1)=p^2+p+1 \quad ・・・①'$$

(1)　20 点

$(1+p+p^2)(1+q)$ ‥5 点

$1+q=2p^2k$（k は正の整数）と表せる ‥5 点

$k=1$ ‥5 点

答‥5 点

(1)[別解]　20 点

$(1+p+p^2)(1+q)$ ‥5 点

が成立する。$p \geqq 2$ より，$p^2-p-1>p^2-p-p=p(p-2)\geqq 0$ であるから $q \geqq 2$ より， $2(p^2-p-1)\leqq p^2+p+1$ $\Leftrightarrow p^2-3p-3\leqq 0$ $\therefore \dfrac{3-\sqrt{21}}{2}\leqq p \leqq \dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$	$p^2-3p-3\leqq 0$ ･･5 点
が得られ，これを満たす素数 p は $p=2, 3$ に限られる。$p=2, 3$ を①'に代入すると，$p=2$ のとき $q=7$，$p=3$ のとき $q=\dfrac{13}{5}$ となるため，条件を満たす p, q の組は $(p, q)=(2, 7)$ のみであり，このとき $n=28$ と求まる。	$p=2, 3$ ･･5 点
(答)　$n=28$	答･･5 点
(2)	**(2)　30 点**
$\dfrac{3S(n)}{n}=m$ とおく(m は正の整数)。このとき， $S(n)=\dfrac{m}{3}n$ $\Leftrightarrow (1+p+p^2)(1+q)=\dfrac{m}{3}p^2q$ が得られるから，p, q, m のうち少なくとも1つは3の倍数であることがわかる。	**p, q, m のうち少なくとも1つは3の倍数**･･10 点
[1]　p が3の倍数のとき p は素数であることより $p=3$ であり， $13(1+q)=3mq$　　　・・・② となる。$1+q$ と q は互いに素であることから素数 q は13の約数であるとわかる。よって $q=13$ に限られるが，このとき②より $m=\dfrac{14}{3}$ となり不適である。	**p が3の倍数のとき n は存在しない**･･5 点
[2]　q が3の倍数のとき q は素数であることより $q=3$ であり， $4(1+p+p^2)=mp^2$　　　・・・③ となる。(1)より $1+p+p^2$ は p の倍数でないため，$1+p+p^2$ と p^2 は互いに素である。したがって，p^2 は4の約数であるとわかり $p=2$ に限られる。このとき $n=12$ で，また③より $m=7$	**q が3の倍数のとき $n=12$**･･5 点

と確かに m は正の整数である。

[3]　m が3の倍数のとき

$m=3l$ (l は正の整数)とすると，

$$\left(1+p+p^2\right)(1+q)=lp^2q$$

である。ここで，$p \geqq 2,\ q \geqq 2$ より

$$\begin{aligned}
&3p^2q-\left(1+p+p^2\right)(1+q)\\
&=2p^2q-p^2-pq-p-q-1\\
&=\left(p^2q-p^2-q+1\right)+\left(p^2q-pq-p+1\right)-3\\
&=\left(p^2-1\right)(q-1)+(pq-1)(p-1)-3\\
&\geqq 3\cdot 1+3\cdot 1-3\\
&>0
\end{aligned}$$

が得られるから，

$$\begin{aligned}
&p^2q<\left(1+p+p^2\right)(1+q)<3p^2q\\
&\Leftrightarrow p^2q<lp^2q<3p^2q\\
&\Leftrightarrow 1<l<3\ \left(\because p^2q>0\right)
\end{aligned}$$

となる。よって $l=2$ に限られ，このとき(1)より $n=28$ である。

以上[1]～[3]より $n=12,\ 28$ である。

(答)　$n=12,\ 28$

m が 3 の倍数のとき $n=28$・・10 点

(2)[別解 1]

(2)[別解 1]　30 点

(共通部分・・20 点)

(場合分け[2]までは本解と同様)

[3]　m が3の倍数のとき

$m=3l$ (l は正の整数)とすると，

$$\left(1+p+p^2\right)(1+q)=lp^2q$$

である。ここで $p \geqq 2,\ q \geqq 2$ より

$$\begin{aligned}
&p^2<1+p+p^2<\frac{p^2}{2}+\frac{p^2}{2}+p^2\\
&\therefore p^2<1+p+p^2<2p^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&q<1+q\leqq\frac{q}{2}+q\\
&\therefore q<1+q\leqq\frac{3}{2}q
\end{aligned}$$

が成立するから，

$$
\begin{aligned}
&p^2 \cdot q < \left(1+p+p^2\right)(1+q) < 2p^2 \cdot \frac{3}{2}q \\
&\Leftrightarrow p^2q < lp^2q < 3p^2q \\
&\Leftrightarrow 1 < l < 3 \left(\because p^2q > 0\right)
\end{aligned}
$$

を得る。よって $l=2$ に限られ，このとき(1)より $n=28$ である。

以上[1]～[3]より $n=12,\ 28$ である。

m が 3 の倍数のとき $n=28$ ･･10 点

(答) $n=12,\ 28$

(2)[別解 2]

(2)[別解 2]　30 点

(共通部分･･20 点)

(場合分け[2]までは本解と同様)

[3]　m が 3 の倍数のとき

$m=3l$ (l は正の整数)とすると，

$$\left(1+p+p^2\right)(1+q)=lp^2q$$

である。 $n=p^2q$ の正の約数は $1,\ p,\ p^2,\ q,\ pq,\ p^2q$ の 6 個であり，これらはすべて p^2q 以下であるから，

$$1+p+p^2+q+pq+p^2q < 6p^2q \left(\because 1 < p^2q\right)$$

となる。これと

$$1+p+p^2+q+pq+p^2q > p^2q$$

より，

$$
\begin{aligned}
&p^2q < lp^2q < 6p^2q \\
&\Leftrightarrow 1 < l < 6 \left(\because p^2q > 0\right) \\
&\therefore l = 2,\ 3,\ 4,\ 5
\end{aligned}
$$

を得る。

[i]　$l=2$ のとき

(1)より $n=28$ である。

[ii]　$l=3$ のとき

$\left(1+p+p^2\right)(1+q)=3p^2q$ について，$1+q$ と q は互いに素であり，(1)より $1+p+p^2$ と p^2 は互いに素であるから，$1+q$ は p^2 の倍数であり，$1+p+p^2$ は q の倍数である。よって，$\left(1+p+p^2,\ 1+q\right)$ は $\left(q,\ 3p^2\right)$ または $\left(3q,\ p^2\right)$ となる。$\left(1+p+p^2,\ 1+q\right)=\left(q,\ 3p^2\right)$ のとき，

$$
\begin{aligned}
&1+q=3p^2 \\
&\Leftrightarrow 1+\left(1+p+p^2\right)=3p^2 \\
&\therefore 2+p=p^2+p^2
\end{aligned}
$$

となるが，$2<p^2,\ p<p^2$ より，これを満たす素数 p は存在せず不適である。また，$\left(1+p+p^2,\ 1+q\right)=\left(3q,\ p^2\right)$ のとき，

$$
\begin{aligned}
&1+p+p^2=3q\\
&\Leftrightarrow 1+p+p^2=3\left(p^2-1\right)\ \left(\because 1+q=p^2\right)\\
&\therefore 4+p=p^2+p^2
\end{aligned}
$$

となるが，$4\leqq p^2,\ p<p^2$ より，これを満たす素数 p は存在せず不適である。以上より，$l=3$ のとき題意を満たす n は存在しない。

[iii]　$l=4$ のとき

$\left(1+p+p^2\right)\left(1+q\right)=4p^2q$ について, [ii]と同様に $1+q$ は p^2 の倍数であり，$1+p+p^2$ は q の倍数である。また, (1) より $1+p+p^2$ は奇数であるから，$\left(1+p+p^2,\ 1+q\right)$ は $\left(q,\ 4p^2\right)$ となる。よって,

$$
\begin{aligned}
&1+q=4p^2\\
&\Leftrightarrow 1+\left(1+p+p^2\right)=4p^2\\
&\therefore 2+p=2p^2+p^2
\end{aligned}
$$

となるが，$2<2p^2,\ p<p^2$ より，これを満たす素数 p は存在せず不適である。以上より，$l=4$ のとき題意を満たす n は存在しない。

[iv]　$l=5$ のとき

$\left(1+p+p^2\right)\left(1+q\right)=5p^2q$ について, [ii]と同様に $1+q$ は p^2 の倍数であり，$1+p+p^2$ は q の倍数である。よって $\left(1+p+p^2,\ 1+q\right)$ は $\left(q,\ 5p^2\right)$ または $\left(5q,\ p^2\right)$ となる。

$\left(1+p+p^2,\ 1+q\right)=\left(q,\ 5p^2\right)$ のとき

$$
\begin{aligned}
&1+q=5p^2\\
&\Leftrightarrow 1+\left(1+p+p^2\right)=5p^2\\
&\therefore 2+p=3p^2+p^2
\end{aligned}
$$

となるが，$2<3p^2,\ p<p^2$ より，これを満たす素数 p は存在せず不適である。また，$\left(1+p+p^2,\ 1+q\right)=\left(5q,\ p^2\right)$ のとき,

$$1+p+p^2=5q$$
$$\Leftrightarrow 1+p+p^2=5\left(p^2-1\right)\ \left(\because 1+q=p^2\right)$$
$$\therefore 6+p=3p^2+p^2$$

となるが，$6<3p^2$, $p<p^2$ より，これを満たす素数 p は存在せず不適である。以上より，$l=5$ のとき題意を満たす n は存在しない。

以上[i]～[iv]より m が3の倍数のとき題意を満たす n は $n=28$ のみである。

m が 3 の倍数のとき $n=28$･･10 点

以上[1]～[3]より $n=12, 28$ である。

(答)　$n=12, 28$

(2)[別解 3]

(2)[別解 3]　30 点

(共通部分･･20 点)

(場合分け[2]までは本解と同様)

[3]　m が 3 の倍数のとき

$m=3l$ (l は正の整数)とすると，

$$\left(1+p+p^2\right)\left(1+q\right)=lp^2q$$

である。 $p^2<1+p+p^2$, $q<1+q$ より

$$p^2\cdot q<\left(1+p+p^2\right)\left(1+q\right)$$
$$\Leftrightarrow p^2q<lp^2q$$
$$\Leftrightarrow 1<l\ \left(\because p^2q>0\right)$$
$$\therefore l\geqq 2$$

である。$l=2$ のとき，(1)より $n=28$ である。また，$l\geqq 3$ のとき，

$$\left(1+p+p^2\right)\left(1+q\right)=lp^2q$$
$$\Leftrightarrow 1+p+p^2=q\left\{\left(l-1\right)p^2-p-1\right\} \quad ・・・④$$

となる。$q>0$ より，

$$q\left\{\left(l-1\right)p^2-p-1\right\}\geqq q\left(2p^2-p-1\right)\ \left(\because l-1\geqq 2\right) \quad ・・・⑤$$

となり，$2p^2-p-1=\left(p^2-p\right)+\left(p^2-1\right)>0$ より，

$$q\left(2p^2-p-1\right)\geqq 2\left(2p^2-p-1\right)\ \left(\because q\geqq 2\right) \quad ・・・⑥$$

となるから，④, ⑤, ⑥より，

$$1+p+p^2\geqq 2\left(2p^2-p-1\right)$$
$$\Leftrightarrow 0\geqq 3p^2-3p-3$$
$$\therefore p^2-p-1\leqq 0$$

となるが，(1)[別解]より $p^2-p-1>0$ であるから，これを満たた

す素数 p は存在せず不適である。以上のことから，m が 3 の倍数のとき題意を満たす n は $n=28$ のみである。

以上[1]〜[3]より $n=12,\ 28$ である。

(答)　$n=12,\ 28$

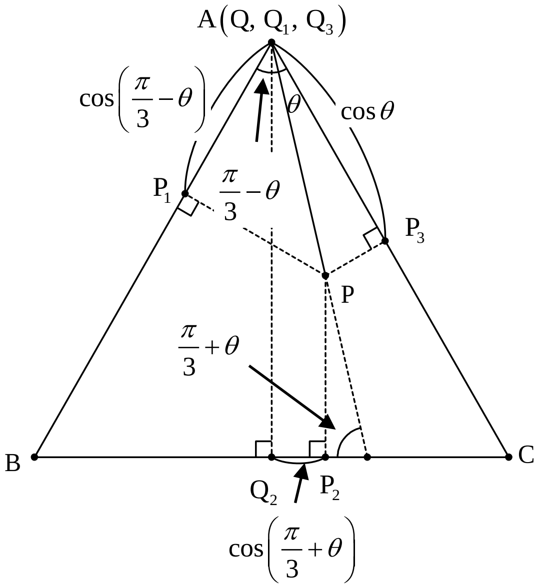
m が 3 の倍数のとき $n=28$ ・・10 点

$\boxed{2}$ （５０点）

線分 PQ を平行移動しても $\left|\overrightarrow{P_1Q_1}\right|+\left|\overrightarrow{P_2Q_2}\right|+\left|\overrightarrow{P_3Q_3}\right|$ の値は変化しない。

また，対称性より P, Q を入れ替えても一般性を失わず，A, B, C を入れ替えても一般性を失わない。したがって，下図のように 2 点 Q, A が一致し，$\angle PAB \geqq \angle PAC$ となるように P, Q と A, B, C をとっても一般性を失わない。以下，$\angle PAC=\theta \left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6}\right)$ とする。

問題文の条件より，P_1, P_2, P_3 はそれぞれ P から AB, BC, CA に対しておろした垂線の足であり，Q_1, Q_2, Q_3 はそれぞれ Q から AB, BC, CA に対しておろした垂線の足であるから，次のような図が描ける。



上図より，$\left|\overrightarrow{P_1Q_1}\right|=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$, $\left|\overrightarrow{P_2Q_2}\right|=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)$, $\left|\overrightarrow{P_3Q_3}\right|=\cos\theta$ となるから，

50 点

△ ABC に対する $\overrightarrow{PQ}$ の向きを θ で表す‥5 点

$\left|\overrightarrow{P_1Q_1}\right|$, $\left|\overrightarrow{P_2Q_2}\right|$, $\left|\overrightarrow{P_3Q_3}\right|$ を θ を用いて表す（絶対値記号を用いてもよい）‥15 点（各 5 点×3）

$\left|\overrightarrow{P_1Q_1}\right|+\left|\overrightarrow{P_2Q_2}\right|+\left|\overrightarrow{P_3Q_3}\right|=2\cos\theta$ ‥12 点

$$\left|\overrightarrow{P_1Q_1}\right|+\left|\overrightarrow{P_2Q_2}\right|+\left|\overrightarrow{P_3Q_3}\right|$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)+\cos\theta$$
$$=\left(\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)+\left(\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)+\cos\theta$$
$$=2\cos\theta$$

であり，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$ より $\sqrt{3}\leqq 2\cos\theta\leqq 2$ となるから，求める最大値は 2 であり，最小値は $\sqrt{3}$ である。

(答)　最大値：2，最小値：$\sqrt{3}$

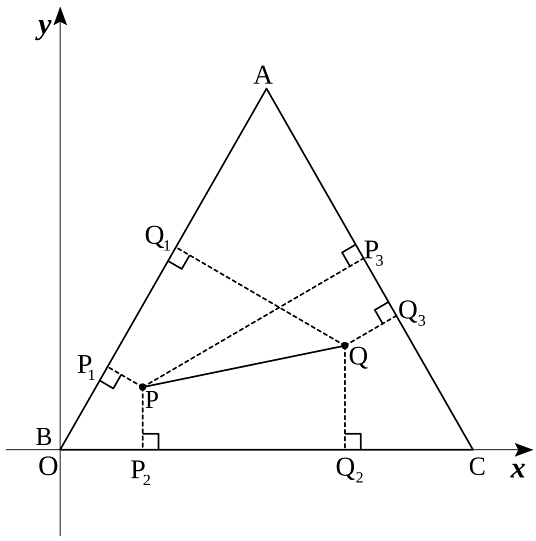
答‥18点

(各9点×2)

(答はあっているが過程に誤りがある場合，最大値および最小値を与える P, Q の存在が示せていれば12点(各6点×2))

[別解 1]

[別解1]　50点



$A(1,\ \sqrt{3}),\ B(0,\ 0),\ C(2,\ 0)$ となるように座標平面をとり，$\left|\overrightarrow{PQ}\right|=1$ より $\overrightarrow{PQ}=(\cos\theta,\ \sin\theta)\ (0\leqq\theta<2\pi)$ とおく。$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{PQ}$ のなす角を θ_1 とすると，

△ABC に対する $\overrightarrow{PQ}$ の向きを θ で表す‥5点

$$\left|\overrightarrow{P_1Q_1}\right|=\left|\cos\theta_1\right|$$
$$=\left|\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PQ}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{PQ}\right|}\right|$$
$$=\left|\frac{-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{2\cdot 1}\right|\quad\left(\because\ \overrightarrow{AB}=\left(-1,\ -\sqrt{3}\right)\right)$$
$$=\left|\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\right|$$

となる。同様にして,

$$
\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}\right| &= \left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|}\right| \\
&= \left|\frac{2\cos\theta}{2\cdot 1}\right| \left(\because \overrightarrow{\mathrm{BC}}=(2,\ 0)\right) \\
&= |\cos\theta|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{\mathrm{P_3Q_3}}\right| &= \left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|}\right| \\
&= \left|\frac{-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}{2\cdot 1}\right| \left(\because \overrightarrow{\mathrm{CA}}=\left(-1,\ \sqrt{3}\right)\right) \\
&= \left|\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)\right|
\end{aligned}
$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}\right|,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}\right|,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{P_3Q_3}}\right|$

を θ を用いて表す(絶対値記号を用いてもよい)

‥15 点(各 5 点×3)

となる。以下,θ で場合分けする。

[1] $0\leqq\theta<\frac{\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6}\leqq\theta<2\pi$ のとき

$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\geqq 0,\ \cos\theta\geqq 0,\ \cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)\leqq 0$ より

$$
\begin{aligned}
&\left|\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{P_3Q_3}}\right| \\
&= \cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\theta-\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)+\cos\theta-\left(-\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right) \\
&= 2\cos\theta
\end{aligned}
$$

[1]のとき $2\cos\theta$

‥2 点

となるから,$0\leqq\theta<\frac{\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6}\leqq\theta<2\pi$ のとき最大値は 2 であり,最小値は $\sqrt{3}$ である。

[2] $\frac{\pi}{6}\leqq\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき

$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\geqq 0,\ \cos\theta\geqq 0,\ \cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)\geqq 0$ より

$$|\overrightarrow{P_1Q_1}|+|\overrightarrow{P_2Q_2}|+|\overrightarrow{P_3Q_3}|$$
$$=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\theta+\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)+\cos\theta+\left(-\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$$
$$=\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$$
$$=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

となるから，$\frac{\pi}{6}\leqq\theta<\frac{\pi}{2}$，すなわち $\frac{\pi}{3}\leqq\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$ のとき最大値は 2 であり，最小値は $\sqrt{3}$ である。

[2]のとき

$2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$ ‥2 点

[3] $\frac{\pi}{2}\leqq\theta<\frac{5\pi}{6}$ のとき

$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\geqq 0,\ \cos\theta\leqq 0,\ \cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)\geqq 0$ より

$$|\overrightarrow{P_1Q_1}|+|\overrightarrow{P_2Q_2}|+|\overrightarrow{P_3Q_3}|$$
$$=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\theta+\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)-\cos\theta+\left(-\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$$
$$=-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$$
$$=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$$

となるから，$\frac{\pi}{2}\leqq\theta<\frac{5\pi}{6}$，すなわち $\frac{\pi}{3}\leqq\theta-\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$ のとき最大値は 2 であり，最小値は $\sqrt{3}$ である。

[3]のとき

$2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$ ‥2 点

[4] $\frac{5\pi}{6}\leqq\theta<\frac{7\pi}{6}$ のとき

$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\leqq 0,\ \cos\theta\leqq 0,\ \cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)\geqq 0$ より

$$|\overrightarrow{P_1Q_1}|+|\overrightarrow{P_2Q_2}|+|\overrightarrow{P_3Q_3}|=-2\cos\theta\ (\because[1])$$

となるから，$\frac{5\pi}{6}\leqq\theta<\frac{7\pi}{6}$ のとき最大値は 2 であり，最小値は $\sqrt{3}$ である。

[4]のとき $-2\cos\theta$ ‥2 点

[5] $\dfrac{7\pi}{6} \leqq \theta < \dfrac{3\pi}{2}$ のとき

$$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right) \leqq 0,\ \cos\theta \leqq 0,\ \cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right) \leqq 0 \text{ より}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{P_3Q_3}}\right| = -2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right) \ (\because [2])$$

となるから，$\dfrac{7\pi}{6} \leqq \theta < \dfrac{3\pi}{2}$ のとき，すなわち $\dfrac{4\pi}{3} \leqq \theta+\dfrac{\pi}{6} < \dfrac{5\pi}{3}$ のとき最大値は 2 であり，最小値は $\sqrt{3}$ である。

[6] $\dfrac{3\pi}{2} \leqq \theta < \dfrac{11\pi}{6}$ のとき

$$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right) \leqq 0,\ \cos\theta \geqq 0,\ \cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right) \leqq 0 \text{ より}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{P_3Q_3}}\right| = -2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right) \ (\because [3])$$

となるから，$\dfrac{3\pi}{2} \leqq \theta < \dfrac{11\pi}{6}$ のとき，すなわち $\dfrac{4\pi}{3} \leqq \theta-\dfrac{\pi}{6} < \dfrac{5\pi}{3}$ のとき最大値は 2 であり，最小値は $\sqrt{3}$ である。

以上[1]～[6]より求める最大値は 2 であり，最小値は $\sqrt{3}$ である。

(答) 最大値：2，最小値：$\sqrt{3}$

[別解 2]

($\left|\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}\right|, \left|\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}\right|, \left|\overrightarrow{\mathrm{P_3Q_3}}\right|$ を求めるところまでは[別解 1]と同様)

ここで，

$$f(x) = \left|\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right| + |\cos x| + \left|\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)\right|$$

とおくと，$f(x)$ は

[5]のとき

$-2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$

‥2 点

[6]のとき

$-2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$

‥2 点

答‥18 点

(各 9 点×2)

(答はあっているが過程に誤りがある場合，最大値および最小値を与える P, Q の存在が示せていれば 12 点

(各 6 点×2))

[別解 2]　50 点

△ ABC に対する $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の向きを θ で表す‥5 点

$$f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\left|\cos\left\{\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{3}\right\}\right|+\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|+\left|\cos\left\{\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{2\pi}{3}\right\}\right|$$
$$=|\cos x|+\left|\cos\left\{\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)+\pi\right\}\right|+\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right|$$
$$=\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right|+|\cos x|+\left|-\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)\right|$$
$$=\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right|+|\cos x|+\left|\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)\right|$$
$$=f(x)$$

を満たすから，周期 $\frac{\pi}{3}$ の周期関数である。したがって，

$$\left|\overrightarrow{P_1Q_1}\right|+\left|\overrightarrow{P_2Q_2}\right|+\left|\overrightarrow{P_3Q_3}\right|=f(\theta)\ \ (0\leqq\theta<2\pi)$$

の最大値および最小値は，$-\frac{\pi}{6}\leqq x\leqq\frac{\pi}{6}$ おける $f(x)$ の最大値および最小値とそれぞれ等しい。$-\frac{\pi}{6}\leqq x\leqq\frac{\pi}{6}$ において

$-\frac{\pi}{2}\leqq x-\frac{\pi}{3}\leqq-\frac{\pi}{6}$, $-\frac{5\pi}{6}\leqq x-\frac{2\pi}{3}\leqq-\frac{\pi}{2}$ であるから，

$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\geqq 0$, $\cos x\geqq 0$, $\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)\leqq 0$ となるため，このとき

$$f(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos x-\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)+\cos x-\left(-\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)$$
$$=2\cos x$$

となる。よって，$-\frac{\pi}{6}\leqq x\leqq\frac{\pi}{6}$ における $f(x)$ の最大値は 2，最小値は $\sqrt{3}$ となる。よって，求める最大値は 2，最小値は $\sqrt{3}$ である。

(答) 最大値：2，最小値：$\sqrt{3}$

$f(x)=2\cos x$
・・12 点
答・・18 点
(各 9 点×2)
(答はあっているが過程に誤りがある場合，最大値および最小値を与える P, Q の存在が示せていれば 12 点
(各 6 点×2))

$\boxed{3}$ （５０点）

【解答・採点基準】

(1)

$\mathrm{P}(a,\ b,\ c),\ \mathrm{C}(s,\ 0,\ 0)$ とおく。$a,\ b,\ c$ は問題文の条件より

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=6\\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+2c=6\\ a+2b+3c=14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=a+10\\ c=-a-2\end{cases}$$

を満たす。したがって

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|&=\sqrt{(a-s)^2+b^2+c^2}\\&=\sqrt{(a-s)^2+(a+10)^2+(-a-2)^2}\\&=\sqrt{(s-a)^2+2a^2+24a+104}\\&=\sqrt{(s-a)^2+2(a+6)^2+32}\end{aligned}$$

となる。よって，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|$ は

$$\begin{cases}s-a=0\\ a+6=0\end{cases}\Leftrightarrow s=a=-6$$

のとき，すなわち $\mathrm{P}(-6,\ 4,\ 4),\ \mathrm{C}(-6,\ 0,\ 0)$ のとき，最小値 $\sqrt{32}=4\sqrt{2}$ をとる。

(答)　$4\sqrt{2}$

(2)

点 C 中心，半径 1 の球面を X とする。(1)の結果より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|\geqq 4\sqrt{2}>1=\left|\overrightarrow{\mathrm{CQ}}\right|$$

となるから，点 P は球面 X の外部にあることがわかる。このことを踏まえると，異なる 3 点 C, P, Q の位置関係として

3 点 C, P, Q が同一直線上にない　　・・・①

3 点 C, Q, P がこの順に同一直線上に並ぶ　　・・・②

3 点 Q, C, P がこの順に同一直線上に並ぶ　　・・・③

(1)　25 点

P の座標を 1 変数で表して

・・5 点(完答)

$\left|\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|$ を $a,\ s$ を用いて表して・・5 点

平方完成・・5 点

答・・10 点

(2)　25 点

の3つの場合が考えられる。$\left|\overrightarrow{\mathrm{CQ}}\right|=1,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right| \geqq 4\sqrt{2}$ となることに注意すると，①のとき△CPQの成立条件から

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{QC}}\right|>\left|\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|$$
$$\therefore \left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|>4\sqrt{2}-1$$

が成り立ち，②のとき

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{QC}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|$$

$$\therefore \left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right| \geqq 4\sqrt{2}-1$$

が成り立ち，③のとき

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{CQ}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|$$

$$\therefore \left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right| \geqq 4\sqrt{2}+1$$

が成り立つから，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right| \geqq 4\sqrt{2}-1$$

が言える。$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right| \geqq 4\sqrt{2}-1$ の等号が成立するのは，

$\mathrm{P}(-6,\ 4,\ 4),\ \mathrm{C}(-6,\ 0,\ 0)$ で，かつ②のときである。このとき，Q は線分 PC を $\left(4\sqrt{2}-1\right):1$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{4\sqrt{2}-1}{4\sqrt{2}}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(-6,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

となる。以上のことから，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|$ の最小値は $4\sqrt{2}-1$ であり，最小値を与える Q の座標は $\left(-6,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ となる。

(答) $\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|$ の最小値：$4\sqrt{2}-1$，Q の座標：$\left(-6,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(2)[別解]

$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right| \geqq 4\sqrt{2}-1$

‥10点

等号成立条件の確認‥5点(完答)

Q の座標‥10点

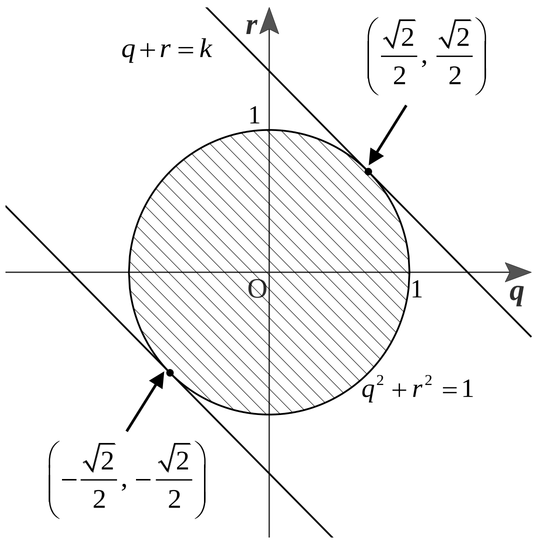
(2)[別解]　25点

C は x 軸上の点であり，Q は $\mathrm{CQ}=1$ を満たす点であるから，

$\mathrm{Q}(p,\ q,\ r)$ は

$$p\text{ は実数，}\ q^2+r^2\leqq 1$$

を満たす空間上の領域の点である。ここで，$q+r$ の取りうる値の範囲を考える。すなわち，$q+r=k$ とおき，qr 平面上で直線 $q+r=k$ と領域 $q^2+r^2\leqq 1$ が共有点をもつような k の値の範囲を考える。



上図より，k の値の範囲は

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqq k\leqq\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Leftrightarrow -\sqrt{2}\leqq k\leqq\sqrt{2}$$

となるから，$q+r$ のとり得る値の範囲は $-\sqrt{2}\leqq q+r\leqq\sqrt{2}$ となる。また，上図より

$$q+r=\sqrt{2}\Leftrightarrow q=r=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\cdot\cdot\cdot①$$

であることに注意する。ここで, (1)より $\mathrm{P}(a,\ a+10,\ -a-2)$ (a は実数)とおけるから，PQ の最小値は

$$\begin{aligned}
\mathrm{PQ} &= \sqrt{(a-p)^2+\{(a+10)-q\}^2+\{(-a-2)-r\}^2} \\
&= \sqrt{(p-a)^2+2\left(a-\frac{q-r-12}{2}\right)^2+\frac{1}{2}(8-q-r)^2} \\
&\geqq \sqrt{0+0+\frac{1}{2}\left(8-\sqrt{2}\right)^2} \quad \left(\because -\sqrt{2}\leqq q+r\leqq\sqrt{2}\right) \\
&= 4\sqrt{2}-1
\end{aligned}$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right| \geqq 4\sqrt{2}-1$

･･10 点

となり，等号成立条件は

$$\begin{cases} p-a=0 \\ a-\dfrac{q-r-12}{2}=0 \\ q+r=\sqrt{2} \end{cases}$$

等号成立条件の確認･･5 点(完答)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p=a \\ a=\dfrac{q-r-12}{2} \quad (\because ①) \\ q=r=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (p,\ q,\ r,\ a)=\left(-6,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ -6\right)$$

である。また，このとき $\mathrm{Q}\left(-6,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ である。

Q の座標･･10 点

(答) $\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|$ の最小値：$4\sqrt{2}-1$，Q の座標：$\left(-6,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\boxed{4}$ （５０点）

【解答・採点基準】

(1)

t を実数とする。$\left(x^3\right)' = 3x^2$ より，$C_2 : y = x^3$ の点 $\left(t, t^3\right)$ における接線は

$$y = 3t^2\left(x-t\right)+t^3$$
$$\therefore y = 3t^2x - 2t^3$$

である。この接線が $C_1 : y = 3x^2 + a$ に接するのは，x についての 2 次方程式

$$3x^2 + a = 3t^2x - 2t^3$$
$$\therefore 3x^2 - 3t^2x + \left(2t^3 + a\right) = 0$$

が重解をもつときであり，この 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$D = \left(-3t^2\right)^2 - 4\cdot 3\cdot\left(2t^3 + a\right)$$
$$= 9t^4 - 24t^3 - 12a$$

であるから，重解をもつのは

$$D = 0$$
$$\therefore a = \frac{3}{4}t^4 - 2t^3$$

のときである。ここで，実数 t_1, t_2 が $t_1 \neq t_2$ を満たすとき $-2t_1{}^3 \neq -2t_2{}^3$ であるから，2 直線 $y = 3t_1{}^2x - 2t_1{}^3$，$y = 3t_2{}^2x - 2t_2{}^3$ は一致しない。したがって，C_2 の接線 $y = 3t^2x - 2t^3$ と実数 t の値は 1 対 1 に対応するから，$a = \frac{3}{4}t^4 - 2t^3$ を満たす実数 t がちょうど 1 つ存在するような a の値を求めればよい。ここで，$f\left(t\right) = \frac{3}{4}t^4 - 2t^3$ とおくと，

(1)　35 点

$y = 3t^2x - 2t^3$ ‥5 点

$3x^2 + a = 3t^2x - 2t^3$ が重解をもつ‥5 点

$D = 9t^4 - 24t^3 - 12a$ ‥5 点

$a = \frac{3}{4}t^4 - 2t^3$ ‥5 点

$$f'(t)=3t^3-6t^2$$
$$=3t^2(t-2)$$

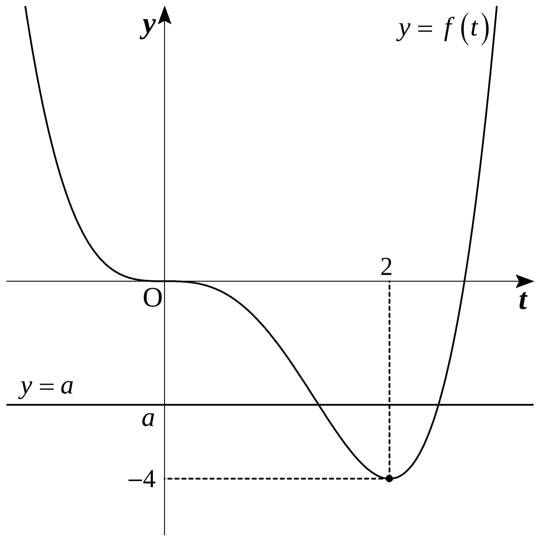
より，$f(t)$ の増減表は下表のようになる。

t	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	0	↘	-4	↗

増減表‥5 点

したがって，$y=f(t)$ のグラフは下図のようになる。t についての方程式 $a=\frac{3}{4}t^4-2t^3$ の異なる実数解の個数は $y=f(t)$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数に等しいから，求める値は $a=-4$ である。

$y=\frac{3}{4}t^4-2t^3$ と $y=a$ の共有点が 1 個となる a の値を求める方針‥5 点



(答)　$a=-4$

答‥5 点

(1)[別解]

(1)[別解]　35 点

s, t を実数とする。$C_1 : y=3x^2+a$ の点 $(s,\ 3s^2+a)$ における接線は $y'=6x$ より，

$$y=6s(x-s)+3s^2+a$$
$$\therefore\ y=6sx-3s^2+a$$

$y=6sx-3s^2+a$ ‥5 点

であり，$C_2 : y=x^3$ の点 $(t,\ t^3)$ における接線は $y'=3x^2$ より，

$$y=3t^2(x-t)+t^3$$
$$\therefore\ y=3t^2x-2t^3$$

である。この 2 つの接線が一致するのは,

$$6s=3t^2 \text{ かつ } -3s^2+a=-2t^3$$

$$\Leftrightarrow s=\frac{t^2}{2} \text{ かつ } -3\left(\frac{t^2}{2}\right)^2+a=-2t^3$$

$$\Leftrightarrow s=\frac{t^2}{2} \text{ かつ } a=\frac{3}{4}t^4-2t^3$$

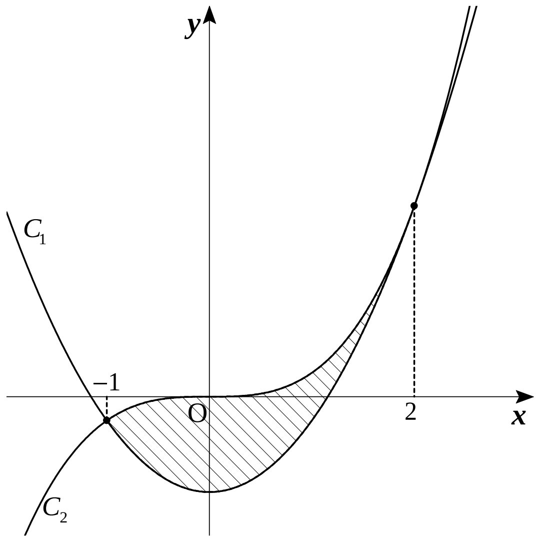
のときである。

(以降は本解と共通)

(2)

$$x^3-(3x^2+a)=x^3-3x^2+4$$
$$=(x-2)^2(x+1)$$

であるから, C_1, C_2 は下図のようになる。



したがって,求める面積は上図の斜線部分の面積であり,

$$\int_{-1}^{2}(x^3-3x^2+4)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+4x\right]_{-1}^{2}$$
$$=4+\frac{11}{4}$$
$$=\frac{27}{4}$$

である。

$y=3t^2x-2t^3$ ・・**5 点**

$6s=3t^2$ **かつ**

$-3s^2+a=-2t^3$ ・・**5 点**

$a=\frac{3}{4}t^4-2t^3$ ・・**5 点**

(共通部分・・15 点)

(2)　15 点

$(x-2)^2(x+1)$ ・・**5 点**

立式・・5 点

(答) $\dfrac{27}{4}$	答‥5 点

$\boxed{5}$ （５０点）

【解答・採点基準】

(1)

$(a,\ b,\ c)$ の組は全部で $6^3=216$ (通り)あり，これらは同様に確からしい。2 次方程式 $2^a x^2+2^b x+2^c=0$ の判別式を D とすると，

$$D=\left(2^b\right)^2-4\cdot 2^a\cdot 2^c=2^{2b}-2^{a+c+2}$$

であるから，実数解をもつ条件は

$$D\geqq 0$$
$$\Leftrightarrow 2b\geqq a+c+2$$

である。ここで，$(a,\ c)$ の組に対応する $a+c+2$ の値を表にすると下のようになる。

	$c=1$	$c=2$	$c=3$	$c=4$	$c=5$	$c=6$
$a=1$	4	5	6	7	8	9
$a=2$	5	6	7	8	9	10
$a=3$	6	7	8	9	10	11
$a=4$	7	8	9	10	11	12
$a=5$	8	9	10	11	12	13
$a=6$	9	10	11	12	13	14

この表より，$2b\geqq a+c+2$ を満たす $(a,\ c)$ の組の個数は下のようになる。

b の値	1	2	3	4	5	6
$(a,\ c)$	0 通り	1 通り	6 通り	15 通り	26 通り	33 通り

したがって，条件を満たす $(a,\ b,\ c)$ の組は

$$0+1+6+15+26+33=81(\text{通り})$$

(1)　20 点

$D=2^{2b}-2^{a+c+2}$ ‥5 点

$2b\geqq a+c+2$ ‥5 点

81 通り‥5 点

となるから，求める確率は

$$\frac{81}{6^3}=\frac{3}{8}$$

となる。

(答) $\frac{3}{8}$

答‥5 点

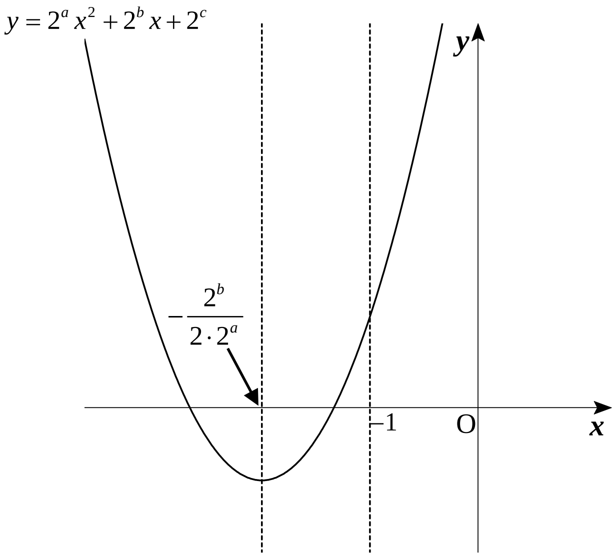
(2)

(2)　30 点

$$2^a x^2+2^b x+2^c=2^a\left(x+\frac{2^b}{2\cdot 2^a}\right)^2+2^c-\frac{2^{2b}}{4\cdot 2^a}$$

より，放物線 $y=2^a x^2+2^b x+2^c$ の軸は $x=-\frac{2^b}{2\cdot 2^a}$ となる。

$x=-\frac{2^b}{2\cdot 2^a}$ **‥5 点**



2 次方程式 $2^a x^2+2^b x+2^c=0$ が実数解をもち，かつ -1 以上の実数解をもたない条件は

$$D\geqq 0 \text{ かつ } -\frac{2^b}{2\cdot 2^a}<-1 \text{ かつ } f(-1)>0$$

である。(1)より，

$$D\geqq 0$$
$$\Leftrightarrow 2b\geqq a+c+2$$

であり，

$D\geqq 0$ **かつ**

$-\frac{2^b}{2\cdot 2^a}<-1$ **かつ**

$f(-1)>0$ **‥5 点**

$$-\frac{2^b}{2\cdot 2^a}<-1$$
$$\Leftrightarrow 2^{b-a-1}>1$$
$$\Leftrightarrow b-a-1>0$$
$$\Leftrightarrow b-a-1\geqq 1\ \ (\because b-a-1\text{は整数})$$
$$\Leftrightarrow b-2\geqq a$$

であり，

$$f(-1)>0$$
$$\Leftrightarrow 2^a-2^b+2^c>0$$
$$\Leftrightarrow 2^a+2^c>2^b$$

となる。ここで，$2^a+2^c>2^b$ を条件 P，「$a\geqq b$ または $c\geqq b$」を条件 Q とする。このとき，$a\geqq b$ ならば $2^a\geqq 2^b,\ 2^c>0$ より P が成り立ち，$c\geqq b$ ならば $2^c\geqq 2^b,\ 2^a>0$ より P が成り立つから，$Q\Rightarrow P$ が成り立つ。また，

$$a<b\text{ かつ }c<b$$
$$\Leftrightarrow a\leqq b-1\text{ かつ }c\leqq b-1$$
$$\Leftrightarrow 2^a\leqq 2^{b-1}\text{ かつ }2^c\leqq 2^{b-1}$$
$$\therefore 2^a+2^c\leqq 2^b\ \left(\because 2^{b-1}+2^{b-1}=2^b\right)$$

より，$\overline{Q}\Rightarrow\overline{P}$ が成り立つから，その対偶である $P\Rightarrow Q$ も成り立つ。以上のことから，$P\Leftrightarrow Q$ が成り立ち，

$$D\geqq 0\text{ かつ }-\frac{2^b}{2\cdot 2^a}<-1\text{ かつ }f(-1)>0$$
$$\Leftrightarrow 2b\geqq a+c+2\text{ かつ }b-2\geqq a\text{ かつ「}a\geqq b\text{ または }c\geqq b\text{」}$$
$$\Leftrightarrow 2b\geqq a+c+2\text{ かつ }b\geqq a+2\text{ かつ }c\geqq b$$

となるから，(1)の $a+c+2$ の値の表より，これを満たす $(a,\ c)$ の組の個数は下のようになる。

b の値	1	2	3	4	5	6
$(a,\ c)$	0 通り	0 通り	1 通り	3 通り	5 通り	4 通り

したがって，条件を満たす $(a,\ b,\ c)$ の組は

$$0+0+1+3+5+4=13\text{ (通り)}$$

となるから，求める確率は

$$-\frac{2^b}{2\cdot 2^a}<-1$$
$\Leftrightarrow b-2\geqq a$ ‥**5 点**

$$f(-1)>0$$
$\Leftrightarrow 2^a+2^c>2^b$ ‥**5 点**

$$f(-1)>0$$
$\Leftrightarrow$ **「**$a\geqq b$ **または** $c\geqq b$**」**‥**5 点**

$$\frac{13}{6^3}=\frac{13}{216}$$

となる。

(答) $\frac{13}{216}$

答・・5 点