2020 年第 2 回東工大模試

採点基準 数学

第 1 問 (60 点満点)

(1) (配点 5 点)

- 完答で 5 点

(2) (配点 35 点)

- $a_1 < a_2$ を示して 10 点
- $a_2 \leqq \frac{3}{2}$ を示し，$n \geqq 2$ について数学的帰納法を立てて 10 点
- $n = 2$ のとき $a_n \leqq a_2$ が成立することを示して 10 点
- $n = k$ のとき $a_n \leqq a_2$ が成立すると仮定すると，$n = k + 1$ のときも成立することを示して 10 点

(3) (配点 20 点)

- $a_n \geqq 1$ を示して 10 点
- (2)の結果を利用して $a_n \leqq 1 + \left(\frac{a_2}{n}\right)^p$ を示して 5 点
- 答えに 5 点(答えのみは不可)

第 2 問 (60 点満点)

(1) (配点 20 点)

- 図または C_1, C_2 の辺々を引く変形に 5 点
- 直線 $y=x$ と共有点を持つ条件に言い換えて 5 点
- 方程式 $x^2-x+t^2=0$ を導出して 5 点
- 答えに 5 点

(2) (配点 40 点)

- 曲線 C_1, C_2 の共有点の x 座標を求めて 10 点 (各 5 点)
- 断面積の立式の根拠となる説明や図に 5 点
- 断面積の立式に 5 点
- 断面積を求めて 5 点
- 体積の立式に 5 点
- $t=\frac{1}{2}\sin\theta$ の置換後の式に 5 点
- 答えに 10 点

第 3 問（60 点満点）

(1)(配点 35 点)

- $y = \log x$のグラフが上に凸であることに言及して 5 点
- $x = s\,(\geqq 1)$における接線の方程式を求めて 5 点
- 左辺 $<$ 中辺について面積を比較する説明をして 5 点
- 中辺 $<$ 右辺について面積を比較する説明をして 5 点
- 左辺に関する台形の面積を求めて 5 点
- 右辺に関する台形の面積を求めて 5 点
- 得た不等式について $k = 1, 2, \cdots, n$の和を考えて 5 点

(2)(配点 25 点)

- $\log n!$を評価できて 5 点
- a_nを評価できて 5 点
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$を含む部分を適切に処理できて 5 点
- 証明完了できて 10 点

第 4 問(60 点満点)

(1)　(配点 10 点)

- 3～5 回出る確率をそれぞれ正しく求めて‥5 点(完答)
- 答が正しく書けて‥5 点

(2)　(配点 20 点)

- 「状態 A」かつある 1 つの目が 5 回および 4 回でるときの確率を求めて‥5 点(完答)
- 「状態 A」かつある 1 つの目が 3 回でるときの確率を求めて‥10 点　(3 回出る目が連続する確率[1]で 5 点, 3 回出る目以外が連続する確率[2]で 5 点)
- 答が正しく書けて‥5 点

(3)　(配点 5 点)

- 答が正しく書けて‥5 点

(4)　(配点 25 点)

- 1 番の箱に 2 が入るときの場合の数を求めて‥5 点
- 1 番の箱に 2 以外の球が入っても同様に考えられることを正しく記述して‥10 点
- 完全順列となる確率を求めて‥5 点
- 答が正しく書けて‥5 点

第 5 問 (60 点満点)

(1)　(配点 30 点)

- $y=-x^3+2x^2+4x$ と $y=k$ の交点を考える方針に 5 点
- $-x^3+2x^2+4x$ の増減表を書いて 5 点
- $k<-\frac{40}{27},\ 8<k$ のとき，実軸上の点を A とおくと，k によらず $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ となることを示して 5 点
- $k<-\frac{40}{27},\ 8<k$ のとき，k によらず 3点 A, B, C は三角形をなすことを示して 5 点
- $-\frac{40}{27}\leqq k\leqq 8$ のとき，k によらず 3点 A, B, C は二等辺三角形をなさないことを示して 5 点
- 答に 5 点

(2)　(配点 30 点)

- $z+\bar{z},\ z\bar{z}$ をそれぞれ r で表して 5 点
- 実数解 r は $r<-2,\ \frac{10}{3}<r$ の範囲全体を動くことを示して 10 点
- 二等辺三角形 ABC の 3辺の長さをそれぞれ r で表して 5 点

  (または，$z=r+u\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$ とおいたとき $u=\dfrac{2-3r}{2\cos\frac{\theta}{2}}$ となることを示して 5 点)

  (または，$\cos\theta=\frac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{\bar{z}-r}{z-r}\right)+\overline{\left(\dfrac{\bar{z}-r}{z-r}\right)}\right\}$ を示して 5 点)
- $\cos\theta=\frac{1}{2}+\dfrac{8}{3r^2-4r-4}$ に 5 点
- 答に 5 点