東工大本番レベル模試

解答・解説・採点基準

全５問　１８０分　３００点満点

Ⅰ　（６０点）

【解答・採点基準】

(1)

放物線 C_2 の方程式は，a, b を実数として

$$y = ax^2 + bx \ (a \neq 0)$$

とおける。これと $C_1 : y = \frac{1}{x^n}$ は $x = t$ における y 座標の値が一致するから，$t \neq 0$ より

$$at^2 + bt = \frac{1}{t^n}$$

$$\therefore at + b = \frac{1}{t^{n+1}} \quad \cdots ①$$

である。また，$C_1 : y = ax^2 + bx$，$C_2 : y = \frac{1}{x^n}$ を微分するとそれぞれ

$y' = -\frac{n}{x^{n+1}}$，$y' = 2ax + b$ となり，$x = t$ におけるこれらの微分係数が一致するから

$$2at + b = -\frac{n}{t^{n+1}} \quad \cdots ②$$

となる。①，②より

$$a = -\frac{n+1}{t^{n+2}}, \ b = \frac{n+2}{t^{n+1}}$$

と求まる。したがって，$a < 0, b > 0$ より，曲線 C_1 と放物線 C_2 の位置関係は下図のようになる。

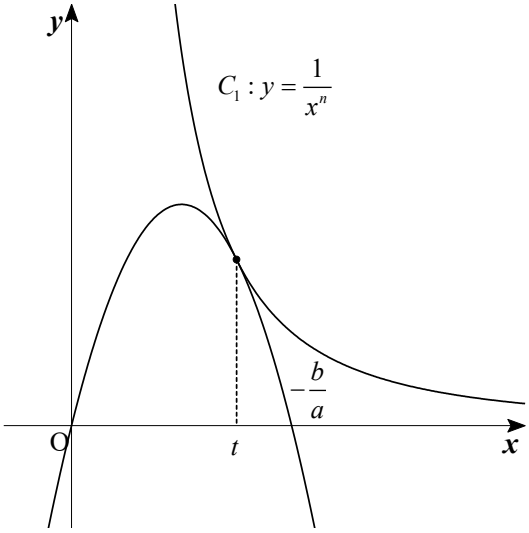
（1）　30 点

放物線の方程式を $y = ax^2 + bx$ とおいて‥5 点

①の導出‥5 点

②の導出‥5 点

a, b を正しく求めて‥5 点



$C_2 : y = ax^2 + bx$

よって，上図より求める面積 S_n は

$$S_n = \int_0^{-\frac{b}{a}} \left(ax^2 + bx\right) dx$$
$$= a\int_0^{-\frac{b}{a}} x\left(x + \frac{b}{a}\right) dx$$
$$= a \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{b}{a}\right)^3$$
$$= \frac{b^3}{6a^2}$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{(n+2)^3}{t^{3(n+1)}} \cdot \frac{t^{2(n+2)}}{(n+1)^2}$$
$$= \frac{(n+2)^3}{6(n+1)^2 t^{n-1}} \quad \cdots \text{(答)}$$

である。

(2)

(1)の結果より

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{(n+3)^3}{6(n+2)^2 t^n} \cdot \frac{6(n+1)^2 t^{n-1}}{(n+2)^3}$$
$$= \frac{(n+1)^2 (n+3)^3}{(n+2)^5 t}$$

となる。したがって，$S_n > 0$ かつ $t > 0$ より

$$S_{n+1} \leqq S_n$$

$$\Leftrightarrow \frac{S_{n+1}}{S_n} \leqq 1$$

$S_n = \frac{b^3}{6a^2}$ ‥5 点

（最初から a, b を n, t で表していても可）

答‥5 点

(2)　30 点

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)^2(n+3)^3}{(n+2)^5} \leqq t \qquad \cdots ③$$

である。③が全ての正の整数nで成り立つようなtの最小値を求めれば良い。以下では③の左辺の最大値を求める。

$$f(x)=\frac{(x+1)^2(x+3)^3}{(x+2)^5}\ (x \geqq 1)$$

とおく。常に$f(x)>0$であるから，両辺の自然対数を取ると

$$\log f(x)=2\log(x+1)+3\log(x+3)-5\log(x+2)$$

となる。両辺をxで微分して

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x+3}-\frac{5}{x+2}$$
$$=\frac{2(x+3)(x+2)+3(x+1)(x+2)-5(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+3)(x+2)}$$
$$=\frac{3-x}{(x+1)(x+3)(x+2)}$$

$$\therefore f'(x)=\frac{(x+1)(x+3)^2(3-x)}{(x+2)^6}$$

を得るから，$f(x)$の増減表は以下のようになる。

x	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$		↗	$f(3)$	↘

したがって，$f(x)$は$x=3$のとき最大値をとり，3は正の整数であるから，③の左辺の最大値も$f(3)$に等しくなる。よって，

$$t \geqq f(3)=\frac{4^2\cdot 6^3}{5^5}=\frac{2^7\cdot 3^3}{5^5}$$

となればよいから，求める最小値は

$$t=\frac{2^7\cdot 3^3}{5^5}\left(=\frac{3456}{3125}\right) \qquad \cdots (答)$$

である。

(2)[別解]

（③を導出するところまでは同じ）

③の導出‥5 点

正の整数nを実数xに置き替えた関数$f(x)$の最大値を求める方針‥5 点

$f'(x)$を因数分解された形で正しく求めて‥5 点

増減表‥5 点

③の左辺は$n=3$で最大値を取ることを述べて‥5 点

答‥5 点
（既約分数で表せていれば可）

(2)[別解] 30 点
③の導出‥5 点

$$\frac{(n+1)^2(n+3)^3}{(n+2)^5}=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^3$$
$$=\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^2\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^3$$

である。$\theta=\frac{1}{n+2}$ とおくと $n\geqq 1$ より $0<\theta\leqq\frac{1}{3}$ であり，③は

$$(1-\theta)^2(1+\theta)^3\leqq t \qquad \cdots ④$$

となる。以下では④の左辺の最大値を求める。

$$g(\theta)=(1-\theta)^2(1+\theta)^3 \quad \left(0<\theta\leqq\frac{1}{3}\right)$$

とおくと

$$g'(\theta)=-2(1-\theta)(1+\theta)^3+3(1-\theta)^2(1+\theta)^2$$
$$=(1-\theta)(1+\theta)^2\{-2(1+\theta)+3(1-\theta)\}$$
$$=(1-\theta)(1+\theta)^2(1-5\theta)$$

を得るから，$g(\theta)$ の増減表は以下のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\frac{1}{5}$	$\cdots$	$\frac{1}{3}$
$g'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$g(\theta)$		↗	$g\left(\frac{1}{5}\right)$	↘	

したがって，$g(\theta)$ は $\theta=\frac{1}{5}$ より $n=3$ のときに最大値をとるから，

③の左辺の最大値も $g\left(\frac{1}{5}\right)$ に等しくなる。よって，

$$t\geqq g\left(\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{4}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^3=\frac{2^7\cdot 3^3}{5^5}$$

となればよいから，求める最小値は

$$t=\frac{2^7\cdot 3^3}{5^5}\left(=\frac{3456}{3125}\right) \qquad \cdots (答)$$

である。

$\theta=\frac{1}{n+2}$ と置き換えた関数 $g(\theta)$ の最大値を求める方針‥5 点

$g'(\theta)$ を因数分解された形で正しく求めて‥5 点

$g(\theta)$ の増減表‥5 点

③の左辺は $n=3$ で最大値を取ることを述べて‥5 点

答‥5 点
（既約分数で表せていれば可）

2（６０点）

【解答・採点基準】

(1)

$ab+bc+ca-abc$ を a の関数とみなして整理すると，

$$\begin{aligned} ab+bc+ca-abc &= (-bc+b+c)a+bc \\ &= \{-(bc-b-c+1)+1\}a+bc \\ &= \{1-(b-1)(c-1)\}a+bc \end{aligned}$$

となり，a について高々1次関数となる。$b \geqq 2$ かつ $c \geqq 2$ より，$b-1 \geqq 1$ かつ $c-1 \geqq 1$ であるから，$1-(b-1)(c-1) \leqq 0$ であり，$ab+bc+ca-abc$ に $a=2$ を代入した式の最大値を求めればよい。このとき，

$$\begin{aligned} ab+bc+ca-abc &= 2b+bc+2c-2bc \\ &= -bc+2b+2c \\ &= -(bc-2b-2c+4)+4 \\ &= 4-(b-2)(c-2) \end{aligned}$$

となり，$b \geqq 2$ かつ $c \geqq 2$ より $(b-2)(c-2) \geqq 0$ であるから，$b=2$ または $c=2$ のときに最大値4をとる。以上より，$ab+bc+ca-abc$ の最大値は4である。　　・・・(答)

(1)[別解 1]

$X=a-2,\ Y=b-2,\ Z=c-2$ とおく。このとき，a, b, c は2以上の整数であるから X, Y, Z は0以上の整数となり，

$a=X+2,\ b=Y+2,\ c=Z+2$ となるから，

$$\begin{aligned} &ab+bc+ca-abc \\ &= (X+2)(Y+2)+(Y+2)(Z+2) \\ &\qquad +(Z+2)(X+2)-(X+2)(Y+2)(Z+2) \\ &= -XYZ-XY-YZ-ZX+4 \\ &= -(XYZ+XY+YZ+ZX)+4 \end{aligned}$$

となる。$XYZ+XY+YZ+ZX \geqq 0$ であり，等号は X, Y, Z のうち2つ以上が0であるときに成立する。このとき $ab+bc+ca-abc=4$ であるから，最大値は4である。　　・・・(答)

(1) 30点

1文字について整理し，1次関数になることを示す‥10点

傾きが0以下であることを示し，最大値をとる a の値を求める‥5点

残りの2文字について最大値をとる値を求める‥10点

答‥5点

(1)[別解 1] 30点

X, Y, Z の定義‥10点

与式を X, Y, Z で表す‥5点

不等式で最大値を示し、等号が成立する条件を示す‥10点

答‥5点

(1)[別解 2]

$a=b=c=2$のとき $ab+bc+ca-abc=4$である。以下，$a\geqq 2$に対し，任意の$b\geqq 2$，$c\geqq 2$について $ab+bc+ca-abc\leqq 4$となることをaについての数学的帰納法で示す。

[1] $a=2$のとき

$$\begin{aligned} ab+bc+ca-abc &= 2b+bc+2c-2bc \\ &= -bc+2b+2c \\ &= -(bc-2b-2c+4)+4 \\ &= 4-(b-2)(c-2) \end{aligned}$$

であり，$b\geqq 2$かつ$c\geqq 2$より $(b-2)(c-2)\geqq 0$であるから，$4-(b-2)(c-2)\leqq 4$となる。よって $ab+bc+ca-abc\leqq 4$が成立する。

[2] $a=k$ (kは2以上の整数)のとき

$kb+bc+ck-kbc\leqq 4$

と仮定する。$a=k+1$のときを考えると，

$$\begin{aligned} &(k+1)b+bc+c(k+1)-(k+1)bc \\ &= kb+b+bc+ck+c-kbc-bc \\ &= (kb+bc+ck-kbc)-bc+b+c \\ &\leqq 4-bc+b+c \\ &= -(bc-b-c+1)+1+4 \\ &= 5-(b-1)(c-1) \end{aligned}$$

である。$b\geqq 2$かつ$c\geqq 2$より，$b-1\geqq 1$かつ$c-1\geqq 1$であるから，$5-(b-1)(c-1)\leqq 4$である。よって，$a=k+1$のときも $ab+bc+ca-abc\leqq 4$が成立する。

以上[1], [2]より，$ab+bc+ca-abc\leqq 4$が示された。求める最大値は4である。　　・・・(答)

(1)[別解 3]

$a=b=c=2$のとき $ab+bc+ca-abc=4$である。ここで，対称性より$a\leqq b\leqq c$としても一般性を失わない。このとき，

$$ab+bc+ca-abc=abc\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-1\right)$$

であり，$a\geqq 3$のとき

(1)[別解 2] 30 点
最大値が 4 である予想を立てる‥5 点

1 文字について数学的帰納法を立てる方針‥5 点

$a=2$ のとき成立することを示す‥10 点

$a=k$ のとき成立することを示す‥10 点

(1)[別解 3] 30 点
最大値が 4 である予想を立てる‥5 点

a, b, c に大小関係を設定する‥5 点

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-1 \leqq \frac{3}{a}-1 \leqq 0$$

と $abc>0$ より $ab+bc+ca-abc \leqq 0$ となり，最大値をとらない。よって $a=2$ となる。このとき，

$$\begin{aligned} ab+bc+ca-abc &= 2b+bc+2c-2bc \\ &= -bc+2b+2c \\ &= -(bc-2b-2c+4)+4 \\ &= 4-(b-2)(c-2) \end{aligned}$$

となり，$2 \leqq b \leqq c$ より $(b-2)(c-2) \geqq 0$ であるから，$b=2$ のときに最大値 4 をとる。以上より，$ab+bc+ca-abc$ の最大値は 4 である。　・・・(答)

(2)

与えられた等式

$$ab+bc+ca-abc=a \qquad \cdots ①$$

について，$a=1$ とすると

$$\begin{aligned} &b+bc+c-bc=1 \\ \Leftrightarrow\ &b+c=1 \end{aligned}$$

となるが，これを満たす正の整数 (b, c) の組は存在しない。また，①について $b=1$ とすると，

$$\begin{aligned} &a+c+ac-ac=a \\ \Leftrightarrow\ &c=0 \end{aligned}$$

となるが，これは c が正の整数であることに反する。同様に①について $c=1$ とすると $b=0$ となり，b が正の整数であることに反する。よって，正の整数 a, b, c が等式①を満たすとき，a, b, c は全て 2 以上である。このとき(1)より $ab+bc+ca-abc \leqq 4$ であるから，①より a のとりうる値は $a=2, 3, 4$ に限られる。以下，それぞれの a の値について等式①を満たす 2 以上の整数 (b, c) の組を求める。

[1]　$a=2$ のとき

等式①は

$$\begin{aligned} &2b+bc+2c-2bc=2 \\ \Leftrightarrow\ &bc-2b-2c+4=-2+4 \\ \Leftrightarrow\ &(b-2)(c-2)=2 \end{aligned}$$

となる。$b-2 \geqq 0$ かつ $c-2 \geqq 0$ より，これを満たす b, c の組は

a　3 で与式が最大値を取らないことを示す‥5 点

最大値をとる a の値を求める‥5 点

残りの 2 文字について最大値をとる値を求める‥10 点

(2) 30 点

$a=1$ の場合に与式が成立しないことを示す‥5 点

$b=1, c=1$ の場合に与式が成立しないことを示す‥5 点

(1)の結果を利用し a の候補を絞る‥5 点

$a=2$ のとき条件を満たす組を求める‥5 点(完答)

$(b-2,\ c-2)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$

$\Leftrightarrow (b,\ c)=(3,\ 4),\ (4,\ 3)$

と求まる。

[2] $a=3$ のとき

等式①は

$3b+bc+3c-3bc=3$

$\Leftrightarrow 2bc-3b-3c+3=0$

$\Leftrightarrow 4bc-6b-6c+6=0$

$\Leftrightarrow (2b-3)(2c-3)=3$

となる。$2b-3 \geqq 1$ かつ $2c-3 \geqq 1$ より，これを満たす $b,\ c$ の組は

$(2b-3,\ 2c-3)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)$

$\Leftrightarrow (b,\ c)=(2,\ 3),\ (3,\ 2)$

と求まる。

[3] $a=4$ のとき

等式①は

$4b+bc+4c-4bc=4$

$\Leftrightarrow 3bc-4b-4c+4=0$

$\Leftrightarrow 9bc-12b-12c+12=0$

$\Leftrightarrow (3b-4)(3c-4)=4$

となる。$3b-4 \geqq 2$ かつ $3c-4 \geqq 2$ より，これを満たす $b,\ c$ の組は

$(3b-4,\ 3c-4)=(2,\ 2)$

$\Leftrightarrow (b,\ c)=(2,\ 2)$

と求まる。

以上[1], [2], [3]より，求める正の整数 $(a,\ b,\ c)$ の組は，

$(a,\ b,\ c)=(2,\ 3,\ 4),\ (2,\ 4,\ 3),\ (3,\ 2,\ 3),\ (3,\ 3,\ 2),\ (4,\ 2,\ 2)$

で全てである。　・・・(答)

$a=3$ のとき条件を満たす組を求める‥5点(完答)

$a=4$ のとき条件を満たす組を求める‥5点

※左辺が最大値4を取る条件が $a,\ b,\ c$ のうち少なくとも2個が2であることに言及し，$(b,\ c)=(2,\ 2)$ を求める解法も可)

3 （６０点）

【解答・採点基準】

(1)

$A_1 \sim A_4$の選び方は$(4n)^4$通り存在し，同様に確からしい。四角形ができる条件は，$A_1 \sim A_4$がすべて異なり，時計回りまたは反時計回りに順に並ぶことである。異なる4頂点の選び方は${}_{4n}C_4$通り存在し，各々について$A_1 \sim A_4$の配置は時計回りが4通り，反時計回りが4通り存在するから，

$$p_n = \frac{{}_{4n}C_4 \cdot (4+4)}{(4n)^4}$$
$$= \frac{4n(4n-1)(4n-2)(4n-3)}{24} \cdot \frac{8}{(4n)^4}$$
$$= \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4n}\right)\left(1-\frac{2}{4n}\right)\left(1-\frac{3}{4n}\right)$$

となる。したがって，

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{3} \quad \cdots (答)$$

である。

(2)

$A_1 \sim A_4$の選び方は$(4n)^4$通り存在し，同様に確からしい。台形ができる条件は$A_1 \sim A_4$をつなぐ四角形ができ，1組の対辺のみが平行になることである。この対辺の位置関係で場合分けする。以下，正$4n$角形の外接円の中心を点Oとおく。対辺の組が平行ならば，外接円の弦とみて，対辺の中点同士を結ぶ直線に関して対称であることに注意する。

[1] 対辺の組が正$4n$角形の辺に平行なとき

(1) 15点

四角形ができるための条件を正しく述べて‥5点

p_nの立式‥5点

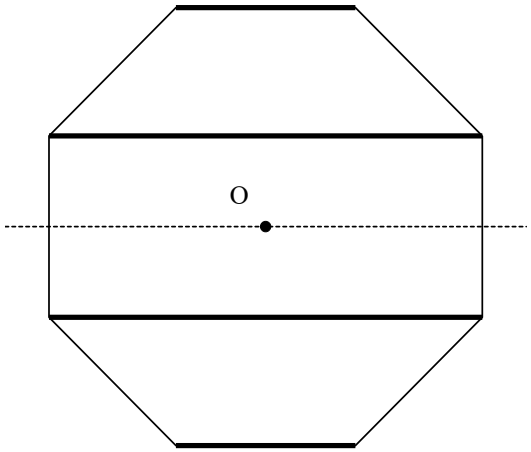
答‥5点

(不定形を解消していないものは不可)

(2) 30点

※長方形を除かない方針で解いた場合，最大15点

対辺の組の向きで場合分けして解く方針‥5点



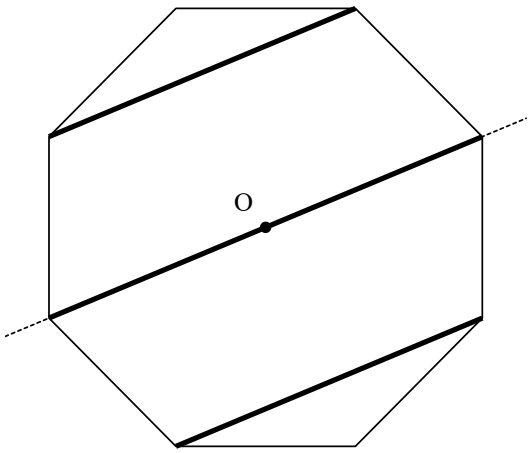
正 $4n$ 角形のどの辺に平行になるかで $2n$ 通り，その各々について対辺の組の選び方が ${}_{2n}\mathrm{C}_2$ 通り存在する。ただし，上図の点線に関して対称な対辺の組は長方形をなし，その組は n 通り存在する。 $\mathrm{A}_1 \sim \mathrm{A}_4$ の配置は時計回りが 4通り，反時計回りが 4通り存在するから，合計で

$$2n\cdot\left({}_{2n}\mathrm{C}_2 - n\right)\cdot\left(4+4\right) = 32n^2\left(n-1\right) \text{ (通り)}$$

存在する。

[1]で正しく立式して‥5 点
（長方形を除かず $2n\cdot{}_{2n}\mathrm{C}_2\cdot\left(4+4\right)$ 通りとした場合，点数を与えない）

[2] 対辺の組が正 $4n$ 角形の辺に平行でないとき



辺の向きの選び方が $2n$ 通り，その各々について対辺の組の選び方が ${}_{2n-1}\mathrm{C}_2$ 通り存在する。ただし，上図の点線に関して対称な対辺の組は長方形をなし，このような組は $n-1$ 通り存在する。 $\mathrm{A}_1 \sim \mathrm{A}_4$ の配置は時計回りが 4通り，反時計回りが 4通り

[2]で正しく立式して‥5 点
（長方形を除かず $2n\cdot{}_{2n-1}\mathrm{C}_2\cdot\left(4+4\right)$

存在するから，合計で

$$2n\cdot\left\{{}_{2n-1}\mathrm{C}_2-(n-1)\right\}\cdot(4+4)=32n(n-1)^2\text{(通り)}$$

存在する。

[1], [2]は排反な場合分けだから，求める確率は

$$q_n=\frac{32n^2(n-1)+32n(n-1)^2}{(4n)^4}$$

$$=\frac{n(n-1)\{n+(n-1)\}}{8n^4}$$

$$=\frac{(n-1)(2n-1)}{8n^3}\qquad\cdots\text{(答)}$$

である。したがって，

$$q_n-\frac{1}{4(n+4)}=\frac{(n+4)(n-1)(2n-1)-2n^3}{8n^3(n+4)}$$

$$=\frac{5n^2-11n+4}{8n^3(n+4)}\quad\cdots①$$

となる。ここで，

$$5n^2-11n+4=5\left(n-\frac{11}{10}\right)^2-\frac{41}{20}$$

かつ

$$n\geqq 2>\frac{11}{10}$$

より，

$$5n^2-11n+4\geqq 5\cdot 2^2-11\cdot 2+4=2>0$$

となる。したがって，①は分子，分母ともに正であるから，

$$q_n-\frac{1}{4(n+4)}>0\Leftrightarrow q_n>\frac{1}{4(n+4)}$$

が示された。また，$0<n-1<n$かつ$0<2n-1<2n$より，

$$q_n<\frac{n\cdot 2n}{8n^3}=\frac{1}{4n}$$

である。よって，題意は示された。

(証明終)

(2)[別解]

通りとした場合，点数を与えない)

$q_n=\dfrac{(n-1)(2n-1)}{8n^3}$

‥5 点

(長方形を除かず

$q_n=\dfrac{(2n-1)^2}{16n^3}$ とした場合は部分点として 5 点)

$q_n>\dfrac{1}{4(n+4)}$

を示して‥5 点

$q_n<\dfrac{1}{4n}$ を示して‥5 点

(長方形を除かず

$\dfrac{1}{4(n+4)}<q_n<\dfrac{1}{4n}$

を正しく示した場合は部分点として 5 点)

(2)[別解] 30 点

$A_1 \sim A_4$の選び方は$(4n)^4$通り存在し，同様に確からしい。台形ができる条件は$A_1 \sim A_4$をつなぐ四角形ができ，1組の対辺のみが平行になることである。以下，正$4n$角形の外接円の中心を点Oとおく。

点A_1の選び方は$4n$通り存在し，各々について$A_1 \sim A_4$の配置は時計回り，反時計回りで2通り存在し，平行になる対辺の組は$A_1A_2 \parallel A_3A_4$と$A_1A_4 \parallel A_2A_3$の2通り存在する。

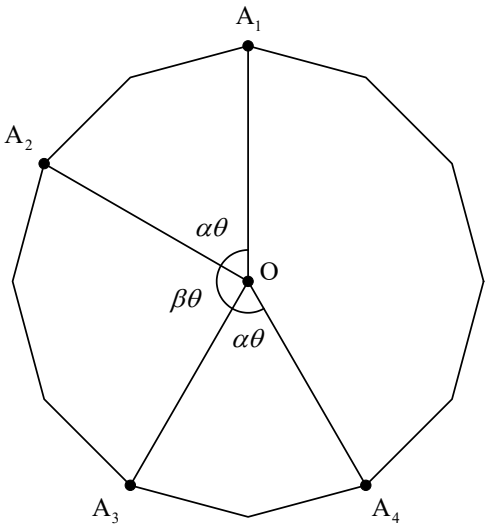
以下，点A_1を固定し，反時計回りで$A_1A_4 \parallel A_2A_3$の条件下で台形をなす場合の数を求める。点Oの対称性より

$$\begin{aligned} &A_1A_4 \parallel A_2A_3 \\ \Leftrightarrow\ &A_1A_2 = A_3A_4 \\ \Leftrightarrow\ &\angle A_1OA_2 = \angle A_3OA_4 \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで，α, βを自然数，$\theta = \dfrac{2\pi}{4n}$として

$$\begin{aligned} &\angle A_1OA_2 = \angle A_3OA_4 = \alpha\theta \\ &\angle A_2OA_3 = \beta\theta \end{aligned}$$

と定義すると，位置関係は下図のようになる。



上図において

$$\angle A_4OA_1 = (4n - 2\alpha - \beta)\theta$$

であり，α, βが決まると$A_1 \sim A_4$の配置も1通りに定まる。αの取り得る範囲は

※長方形を除かない方針で解いた場合，最大15点

点A_1を固定し，残りの頂点の位置を数え上げる方針‥5点

$\alpha = 1, 2, \ldots, 2n-1$

である。長方形になる場合を除く必要があるから，α を固定して考えると，

$$\begin{cases} \angle A_2OA_3 \quad \theta \\ \angle A_4OA_1 \quad \theta \\ \angle A_2OA_3 \neq \angle A_4OA_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta \quad 1 \\ 4n-2\alpha-\beta \quad 1 \\ \beta \neq 4n-2\alpha-\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \quad \beta \quad 4n-2\alpha-1 \\ \beta \neq 2n-\alpha \end{cases}$$

である。$\alpha \quad 2n-1$より$1 \quad 2n-\alpha \quad 4n-2\alpha-1$であるから，$\alpha$ を 1 つ決めるとそれに対応する β は $4n-2\alpha-2$(通り)あることが分かる。したがって，これらを数え上げると

$$\sum_{\alpha=1}^{2n-1}(4n-2\alpha-2) = \frac{1}{2}\cdot(2n-1)\cdot\{(4n-4)+0\}$$

$$= 2(n-1)(2n-1)(\text{通り})$$

存在する。よって，求める確率は

$$q_n = \frac{4n\cdot 2\cdot 2\cdot 2(n-1)(2n-1)}{(4n)^4}$$

$$= \frac{(n-1)(2n-1)}{8n^3} \quad \cdots(\text{答})$$

である。したがって，

$$q_n - \frac{1}{4(n+4)} = \frac{(n+4)(n-1)(2n-1)-2n^3}{8n^3(n+4)}$$

$$= \frac{5n^2-11n+4}{8n^3(n+4)} \quad \cdots①$$

となる。ここで，

$$5n^2-11n+4 = 5\left(n-\frac{11}{10}\right)^2 - \frac{41}{20}$$

かつ

$$n \geqq 2 > \frac{11}{10}$$

より，

中心角に関する条件を全て列挙して‥5 点

($\beta \neq 2n-\alpha$ **の条件を除いた場合，点数を与えない)**

$2(n-1)(2n-1)$**通り‥5 点**

(長方形を除かず $(2n-1)^2$ **通りとした場合，点数を与えない)**

$q_n = \frac{(n-1)(2n-1)}{8n^3}$

‥5 点

(長方形を除かず $q_n = \frac{(2n-1)^2}{16n^3}$ **とした場合は部分点として 5 点)**

$q_n > \frac{1}{4(n+4)}$

を示して‥5 点

$$5n^2-11n+4 \geqq 5\cdot 2^2-11\cdot 2+4=2>0$$

となる。したがって，①は分子，分母ともに正であるから，

$$q_n-\frac{1}{4(n+4)}>0 \Leftrightarrow q_n>\frac{1}{4(n+4)}$$

が示された。また，$0<n-1<n$かつ$0<2n-1<2n$より，

$$q_n<\frac{n\cdot 2n}{8n^3}=\frac{1}{4n}$$

である。よって，題意は示された。

(証明終)

(3)

図形 S を 1 つ作ったときに，台形とならない確率は $1-q_n$ であるから，

$$r_n=(1-q_n)^n$$

となる。よって，

$$1-\frac{1}{4n}<1-q_n<1-\frac{1}{4(n+4)}$$

$$\therefore \left(1-\frac{1}{4n}\right)^n<r_n<\left(1-\frac{1}{4(n+4)}\right)^n$$

である。ここで，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{4n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{4n}\right)^{-4n}\right\}^{-\frac{1}{4}}=e^{-\frac{1}{4}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{4(n+4)}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{4(n+4)}\right)^{-4(n+4)}\right\}^{-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{4}{n}}}=e^{-\frac{1}{4}}$$

となる。よって，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty} r_n=e^{-\frac{1}{4}} \qquad \cdots(答)$$

と求まる。

(3)[別解]

図形 S を 1 つ作ったときに，台形とならない確率は $1-q_n$ であるから，

$$r_n=(1-q_n)^n$$

$q_n<\frac{1}{4n}$ を示して‥5 点

(長方形を除かず

$\frac{1}{4(n+4)}<q_n<\frac{1}{4n}$

を正しく示した場合は部分点として 5 点)

(3)　15 点

r_n に関する不等式を導出して‥5 点

各辺の極限に‥5 点(完答)

答‥5 点

(3)[別解]　15 点

となる。ここで, (2)の結果より

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{8n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} nq_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{4}$$

である。よって,

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} (1-q_n)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{(1-q_n)^{-\frac{1}{q_n}}\right\}^{-nq_n}$$

$$= e^{-\frac{1}{4}} \qquad \cdots (答)$$

と求まる。

$\lim_{n\to\infty} q_n$ ・・5 点

$\lim_{n\to\infty} nq_n$ ・・5 点

答・・5 点

4 （６０点）

【解答・採点基準】

(1)

方程式 $f(x)=0$ と方程式 $g(x)=0$ の共通解を γ とする。このとき，

$$\begin{aligned} & g(\gamma)=0 \\ \Leftrightarrow\ & f(f(\gamma))=0 \\ \Leftrightarrow\ & \{f(\gamma)\}^2+af(\gamma)+b=0 \\ \Leftrightarrow\ & b=0 \ (\because f(\gamma)=0) \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2+ax \\ &= x(x+a) \end{aligned}$$

である。また，

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x)(f(x)+a) \\ &= x(x+a)(x^2+ax+a) \end{aligned}$$

となる。よって，$b=0$ のとき，方程式 $f(x)=0$ と方程式 $g(x)=0$ の共通解は方程式 $x=0,-a$ である。また，方程式 $g(x)=0$ が $x=-1+i$ を解に持つとき，2次方程式 $x^2+ax+a=0$ が $x=-1+i$ を解に持つから，

$$\begin{aligned} & (-1+i)^2+a(-1+i)+a=0 \\ \Leftrightarrow\ & (a-2)i=0 \\ \therefore\ & a=2 \end{aligned}$$

であり，

$$g(x)=x(x+2)(x^2+2x+2)$$

となる。したがって，求める解は，$x=0,-2,-1\pm i$ である。

(答) $(a,b)=(2,0)$，$x=0,-2,-1\pm i$

(2)

方程式 $g(x)=0$ が実数解 r を持つと仮定する。このとき，

$$g(r)=0 \Leftrightarrow f(f(r))=0$$

(1) 20 点

$b=0$ ‥5 点

$g(x)$
$=x(x+a)(x^2+ax+a)$
と表す‥5 点

$a=2$ ‥5 点

$x=0,-2,-1\pm i$
‥5 点(完答)

(2) 10 点

$f(r)=r^2+ar+b$ が

であり，a, b, rはいずれも実数であるから，$f(r)=r^2+ar+b$も実数である。よって，$f(r)$は方程式$f(x)=0$の実数解である。以上より，方程式$g(x)=0$が実数解を持つとき，方程式$f(x)=0$も実数解を持つから，題意は成り立つ。

(証明終)

(2)

示すべき命題の対偶は，

方程式$f(x)=0$が実数解を持たないとき，方程式$g(x)=0$も実数解を持たない

であるから，これが成立することを示す。方程式$f(x)=0$が実数解を持たないとき，$f(x)=0$の判別式についての条件から，

$$a^2-4b<0$$

である。よって，

$$g(x)=0$$
$$\Leftrightarrow f(x)^2+af(x)+b=0$$

についても，$f(x)$が実数値をとるから，

$$f(x)^2+af(x)+b=0$$

を満たす実数$f(x)$は存在しえない。したがって，方程式$f(x)=0$が実数解を持たないとき，方程式$g(x)=0$も実数解を持たない。以上より，題意が示された。

(証明終)

(3)

(2)より，方程式$g(x)=0$が実数解を持つとき，方程式$f(x)=0$も実数解を持つから，与えられた条件を満たすとき，方程式$f(x)=0$は実数解を持つ。ここで，方程式$f(x)=0$が重解を持つとする。このとき，この重解をr'とすれば，

$$f(x)=(x-r')^2$$

と表すことができ，

$$g(x)=\left(f(x)-r'\right)^2$$
$$=\left\{(x-r')^2-r'\right\}^2$$

となる。しかし，

$$g(x)=0\Leftrightarrow(x-r')^2=r'$$

実数であることの確認‥5 点

正しく証明できていて‥5 点

(2) 10 点

対偶を示す方針で$a^2-4b<0$を導く‥5 点

正しく証明できていて‥5 点

(3) 30 点

方程式$f(x)=0$が実数解を持つこと‥5 点

より方程式 $g(x)=0$ の相異なる実数解の個数は 2個以下である。よって，以下では方程式 $f(x)=0$ が相異なる 2つの実数解を持つものとして考える。すなわち，2次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすれば，

$$D>0 \Leftrightarrow a^2-4b>0 \qquad \cdots ①$$

を満たすとする。このとき，方程式 $f(x)=0$ の 2つの実数解を $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$$
$$g(x)=\big(f(x)-\alpha\big)\big(f(x)-\beta\big)$$

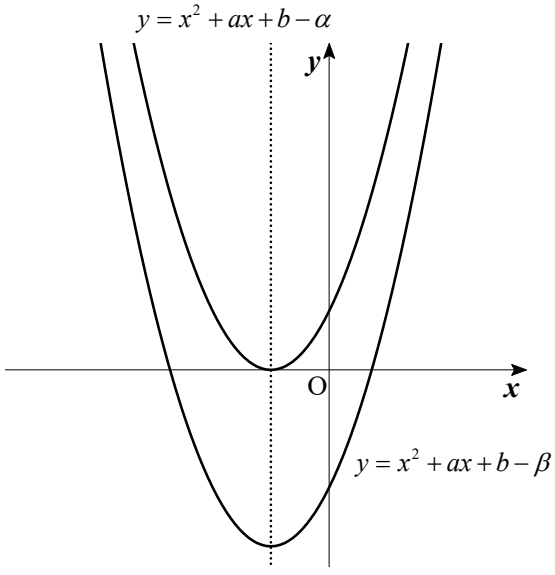
と表せる。よって，

$$g(x)=0$$
$$\Leftrightarrow f(x)-\alpha=0 \ \text{ または } \ f(x)-\beta=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+ax+b-\alpha=0 \ \text{ または } \ x^2+ax+b-\beta=0$$

である。ここで，$\alpha<\beta$ であることから，2次方程式 $x^2+ax+b-\alpha=0$ の判別式を D_a，2次方程式 $x^2+ax+b-\beta=0$ の判別式を D_β とすると，

$$D_a=a^2-4b+4\alpha$$
$$D_\beta=a^2-4b+4\beta$$

が成立するから，$D_a<D_\beta$ である。2つの 2次方程式は定数項だけが異なるため共通解を持たないことに注意すると，方程式 $g(x)=0$ が相異なる 3つの実数解を持つための条件は $D_a=0$ である。



方程式 $f(x)=0$ が重解を持たないこと
‥5 点

①式‥5 点

方程式
$x^2+ax+b-\alpha=0$
が重解を持つこと
‥10 点

よって，方程式 $f(x)=0$ を解くことで，

$$\alpha=\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2},\ \beta=\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

となることから，

$$\begin{aligned}&D_\alpha=0\\&\Leftrightarrow a^2-4(b-\alpha)=0\\&\Leftrightarrow a^2-4\left(b-\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}\right)=0\end{aligned}$$

$$\therefore a^2-2a-4b-2\sqrt{a^2-4b}=0 \qquad \cdots ②$$

が成立する。したがって，①，②より，方程式 $g(x)=0$ が相異なる3つの実数解を持つとき，a, b が満たす条件は，

$$a^2-4b>0 \text{ かつ } a^2-2a-4b-2\sqrt{a^2-4b}=0 \quad (*)$$

である。

(答) $a^2-2a-4b-2\sqrt{a^2-4b}=0\ \left(a^2-4b>0\right)$

(＊)と同値な式‥5 点

(3)[別解]

(3)[別解] 30 点

$y=g(x)$ が $x=-\frac{a}{2}$ に関して対称な曲線となることを利用して条件を求めることもできる。この対称性は，

$$f(x)=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b$$

$$\begin{aligned}g(x)&=f(f(x))\\&=\left(f(x)+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b\end{aligned}$$

より，$y=f(x)$ が $x=-\frac{a}{2}$ に関して対称な曲線であり，実数 r について，

$y=g(x)$ が $x=-\frac{a}{2}$ に

$$f\left(-\frac{a}{2}+r\right)=f\left(-\frac{a}{2}-r\right)$$
$$\therefore g\left(-\frac{a}{2}+r\right)=g\left(-\frac{a}{2}-r\right)$$

が成立することから導くことができる。また，

$$\begin{aligned}g'(x)&=f'\left(f(x)\right)\cdot f'(x)\\&=\left\{2\left(x^2+ax+b\right)+a\right\}(2x+a)\\&=\left(2x^2+2ax+a+2b\right)(2x+a)\\&=4\left\{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+b+\frac{a}{2}-\frac{a^2}{4}\right\}\left(x+\frac{a}{2}\right)\end{aligned}$$

となる。 $y=g(x)$の $x=-\frac{a}{2}$における対称性より，方程式

$g(x)=0$が相異なる3つの実数解を持つことと，方程式

$g(x)=0$が $x=-\frac{a}{2}$と $-\frac{a}{2}<x$の範囲に1つずつ実数解を持つこ

とは同値である。ここで，

$$b+\frac{a}{2}-\frac{a^2}{4}\geqq 0$$
$$\Leftrightarrow a^2-2a-4b\leqq 0$$

のとき，$-\frac{a}{2}<x$で $g'(x)>0$となるから，$g(x)=0$は $x=-\frac{a}{2}$と

$-\frac{a}{2}<x$の範囲の両方に実数解を持つことはないため，

$$a^2-2a-4b>0$$

が必要である。また，$a^2-2a-4b>0$のとき，$-\frac{a}{2}\leqq x$の範囲で

$g(x)$の増減表を書くと以下のようになる。

x	$-\frac{a}{2}$	$\cdots$	$-\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{a}{2}-b}$	$\cdots$
$g'(x)$		−	0	+

関して対称な曲線となることを示す

・・10点

$g'(x)$を求める・・5点

$a^2-2a-4b>0$・・5点

$g(x)$	$g\left(-\frac{a}{2}\right)$	↘	極小	↗

$g\left(-\frac{a}{2}\right)=0$・・5 点

これと $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$ より，$g\left(-\frac{a}{2}\right)=0$ のとき，方程式 $g(x)=0$ は $x=-\frac{a}{2}$ と $-\frac{a}{2}<x$ の範囲に 1つずつ実数解を持つ。以上より，方程式 $g(x)=0$ が相異なる 3つの実数解を持つことと，

$a^2-2a-4b>0$ かつ $g\left(-\frac{a}{2}\right)=0$

は同値である。よって，

$$\begin{aligned} g\left(-\frac{a}{2}\right) &= f\left(f\left(-\frac{a}{2}\right)\right) \\ &= f\left(-\frac{a^2}{4}+b\right) \\ &= \left(-\frac{a^2}{4}+b\right)^2+a\left(-\frac{a^2}{4}+b\right)+b \\ &= \frac{1}{16}a^4-\frac{1}{4}a^3-\frac{1}{2}a^2b+ab+b^2+b \end{aligned}$$

から，求める条件は，

$a^2-2a-4b>0$

かつ $\frac{1}{16}a^4-\frac{1}{4}a^3-\frac{1}{2}a^2b+ab+b^2+b=0$ （＊）

である。

（＊）と同値な式・・5 点

(答) $a^2-2a-4b>0$ かつ $\frac{1}{16}a^4-\frac{1}{4}a^3-\frac{1}{2}a^2b+ab+b^2+b=0$

5 （６０点）

【解答・採点基準】

(1)

$$\tan 2\gamma = \frac{2\tan\gamma}{1-\tan^2\gamma} = \frac{2s}{1-s^2}$$

であるから，

$$\tan 3\gamma = \tan(2\gamma+\gamma) = \frac{\tan 2\gamma + \tan\gamma}{1-\tan 2\gamma\tan\gamma} = \frac{\frac{2s}{1-s^2}+s}{1-\frac{2s}{1-s^2}\cdot s} = \frac{3s-s^3}{1-3s^2}$$ ・・・(答)

と求まる。

(1)[別解]

3倍角の公式より

$$\sin 3\gamma = 3\sin\gamma - 4\sin^3\gamma$$
$$\cos 3\gamma = 4\cos^3\gamma - 3\cos\gamma$$

であるから，

$$\tan 3\gamma = \frac{\sin 3\gamma}{\cos 3\gamma} = \frac{3\sin\gamma - 4\sin^3\gamma}{4\cos^3\gamma - 3\cos\gamma} = \frac{3\tan\gamma\cdot\frac{1}{\cos^2\gamma} - 4\tan^3\gamma}{4-3\cdot\frac{1}{\cos^2\gamma}} = \frac{3\tan\gamma(1+\tan^2\gamma)-4\tan^3\gamma}{4-3(1+\tan^2\gamma)}$$

$$= \frac{3s-s^3}{1-3s^2}$$ ・・・(答)

と求まる。

(1) 10点

$\tan 2\gamma$ ・・5点

答・・5点

（同値なら可）

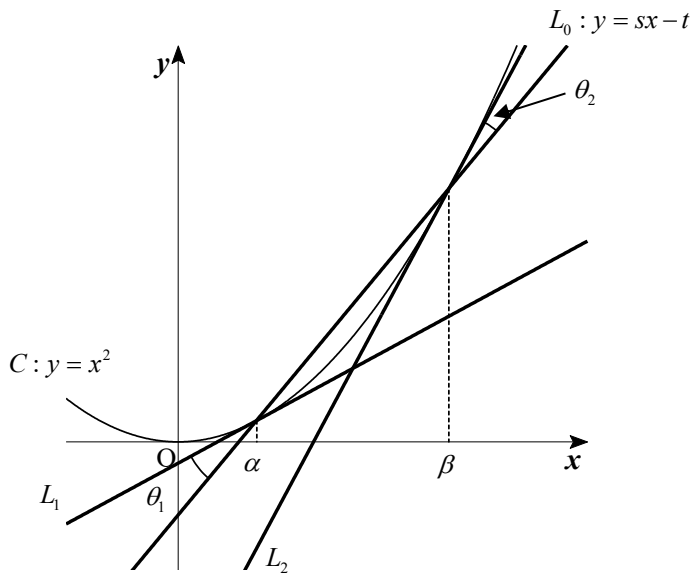
(1)[別解] 10点

$\tan 3\gamma$ を $\sin\gamma$ と $\cos\gamma$ の式で表す ・・5点

答・・5点

（同値なら可）

(2)



放物線 C と直線 L_0 を連立した式

$$x^2 - sx + t = 0$$

が異なる2つの実数解 α, β を持つから，判別式が正となり

$$s^2 - 4t > 0$$

が成り立つ。また，解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = s,\ \alpha\beta = t \qquad \cdots ①$$

であり，$s > 0, t > 0$ より $\alpha > 0, \beta > 0$ だと分かる。放物線 $C : y = x^2$ より $y' = 2x$ であるから，直線 L_1, L_2 の傾きはそれぞれ $2\alpha, 2\beta$ である。つまり L_0, L_1, L_2 の傾きは全て正であるから，上図より

$0 < \theta_1 < \dfrac{\pi}{2}, 0 < \theta_2 < \dfrac{\pi}{2}$ である。したがって，実数 $\theta_\alpha, \theta_\beta$

$\left(0 < \theta_\alpha < \dfrac{\pi}{2}, 0 < \theta_\beta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いて

$$\tan\theta_\alpha = 2\alpha,\ \tan\theta_\beta = 2\beta$$

とおくと，x 軸の正方向と直線 L_0, L_1, L_2 がなす角がそれぞれ $\gamma, \theta_\alpha, \theta_\beta$ となるため，上図より

(2)　35 点

$\tan\theta_1, \tan\theta_2$ の立式の根拠となる図または説明‥5 点

①‥5 点

$\tan\theta_\alpha = 2\alpha$
$\tan\theta_\beta = 2\beta$ ‥5 点

$$\tan\theta_1 = \tan\left(\gamma - \theta_\alpha\right)$$
$$= \frac{\tan\gamma - \tan\theta_\alpha}{1 + \tan\gamma\tan\theta_\alpha}$$
$$= \frac{s - 2\alpha}{1 + 2s\alpha}$$
$$\tan\theta_2 = \tan\left(\theta_\beta - \gamma\right)$$
$$= \frac{\tan\theta_\beta - \tan\gamma}{1 + \tan\theta_\beta\tan\gamma}$$
$$= \frac{2\beta - s}{1 + 2s\beta}$$

$\tan\theta_1$ を s, α で表す‥5 点

$\tan\theta_2$ を s, β で表す‥5 点

となる。よって，①より

$$\tan\left(\theta_1 - \theta_2\right) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1\tan\theta_2}$$
$$= \frac{\dfrac{s - 2\alpha}{1 + 2s\alpha} - \dfrac{2\beta - s}{1 + 2s\beta}}{1 + \dfrac{s - 2\alpha}{1 + 2s\alpha}\cdot\dfrac{2\beta - s}{1 + 2s\beta}}$$
$$= \frac{(s - 2\alpha)(1 + 2s\beta) + (s - 2\beta)(1 + 2s\alpha)}{(1 + 2s\alpha)(1 + 2s\beta) - (s - 2\alpha)(s - 2\beta)}$$
$$= \frac{2s - 2(\alpha + \beta) + 2s^2(\alpha + \beta) - 8s\alpha\beta}{1 + 2s(\alpha + \beta) + 4s^2\alpha\beta - s^2 + 2s(\alpha + \beta) - 4\alpha\beta}$$
$$= \frac{2s - 2s + 2s^2\cdot s - 8s\cdot t}{1 + 2s\cdot s + 4s^2\cdot t - s^2 + 2s\cdot s - 4\cdot t}$$
$$= \frac{2s^3 - 8st}{1 + 3s^2 - 4t + 4s^2t} \quad \cdots (答)$$

$\tan\left(\theta_1 - \theta_2\right)$を s, α, βで表す‥5 点

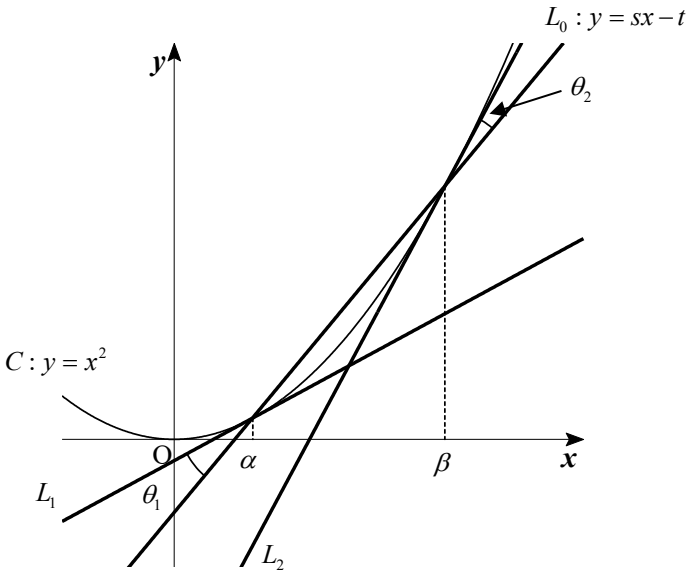
答‥5 点

（同値なら可）

と求まる。

(2)[別解]

(2)［別解］ 35 点



$\tan\theta_1$, $\tan\theta_2$の立式の根拠となる図または説明‥5 点

放物線 C と直線 L_0 を連立した式

$$x^2 - sx + t = 0$$

が異なる 2 つの実数解 α, β を持つから，判別式が正となり

$$s^2 - 4t > 0$$

が成り立つ。また，解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = s,\ \alpha\beta = t \qquad \cdots ①$$

①‥5 点

であり，$s > 0, t > 0$ より $\alpha > 0, \beta > 0$ だと分かる。放物線 $C : y = x^2$ より $y' = 2x$ であるから，直線 L_1, L_2 の傾きはそれぞれ $2\alpha, 2\beta$ である。つまり L_0, L_1, L_2 の傾きは全て正であるから，上図より

$0 < \theta_1 < \dfrac{\pi}{2}, 0 < \theta_2 < \dfrac{\pi}{2}$ である。したがって，実数

$\theta_\alpha, \theta_\beta \left(0 < \theta_\alpha < \dfrac{\pi}{2}, 0 < \theta_\beta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いて

$$\tan\theta_\alpha = 2\alpha,\ \tan\theta_\beta = 2\beta$$

とおくと，上図より

$\tan\theta_\alpha = 2\alpha$
$\tan\theta_\beta = 2\beta$ ‥5 点

$$\theta_1 = \gamma - \theta_\alpha$$
$$\theta_2 = \theta_\beta - \gamma$$

であるから，

$$\theta_1 - \theta_2 = 2\gamma - (\theta_\alpha + \theta_\beta)$$

$\theta_1 - \theta_2$
$= 2\gamma - (\theta_\alpha + \theta_\beta)$
‥5 点

となる。ここで，①より

$$\tan(\theta_\alpha + \theta_\beta) = \frac{\tan\theta_\alpha + \tan\theta_\beta}{1 - \tan\theta_\alpha \tan\theta_\beta}$$
$$= \frac{2\alpha + 2\beta}{1 - 2\alpha \cdot 2\beta}$$
$$= \frac{2(\alpha + \beta)}{1 - 4\alpha\beta}$$
$$= \frac{2s}{1 - 4t}$$

$\tan(\theta_\alpha + \theta_\beta)$ を
α, β で表す‥5 点

であるから，

$\tan(\theta_\alpha + \theta_\beta)$ を
s, t で表す‥5 点

$$\tan(\theta_1-\theta_2)=\tan\left\{2\gamma-(\theta_\alpha+\theta_\beta)\right\}$$
$$=\frac{\tan 2\gamma-\tan(\theta_\alpha+\theta_\beta)}{1+\tan 2\gamma\tan(\theta_\alpha+\theta_\beta)}$$
$$=\frac{\dfrac{2s}{1-s^2}-\dfrac{2s}{1-4t}}{1+\dfrac{2s}{1-s^2}\cdot\dfrac{2s}{1-4t}}$$
$$=\frac{2s(1-4t)-2s(1-s^2)}{(1-s^2)(1-4t)+4s^2}$$
$$=\frac{2s^3-8st}{1+3s^2-4t+4s^2t}\quad\cdots(\text{答})$$

と求まる。

答‥5 点
（同値なら可）

(3)

(1), (2)の結果を $\tan(\theta_1-\theta_2)=\tan 3\gamma$ に代入して

$$\frac{2s^3-8st}{1+3s^2-4t+4s^2t}=\frac{3s-s^3}{1-3s^2}$$

となる。両辺の分母をはらい，両辺を $s(\neq 0)$ で割って

$$(2s^2-8t)(1-3s^2)=(3-s^2)(1+3s^2-4t+4s^2t)$$

となる。 $X=s^2$ とおくと

$$(2X-8t)(3X-1)=(X-3)(1+3X-4t+4Xt)$$
$$\Leftrightarrow 6X^2-24Xt-2X+8t$$
$$=X+3X^2-4Xt+4X^2t-3-9X+12t-12Xt$$
$$\Leftrightarrow t(4X^2+8X+4)-(3X^2+6X+3)=0$$
$$\Leftrightarrow (4t-3)(X^2+2X+1)=0$$

である。これが X についての恒等式となればよいから，求める値は

$t=\dfrac{3}{4}$ である。これは $t>0$ を満たす。　・・・(答)

(3) 15 点

両辺の分母をはらう方針‥5 点

文字 s に関して整理して係数比較‥5 点

答‥5 点

(3)[別解 1]

(1), (2)の結果を $\tan(\theta_1-\theta_2)=\tan 3\gamma$ に代入して

$$\frac{2s^3-8st}{1+3s^2-4t+4s^2t}=\frac{3s-s^3}{1-3s^2}$$
$$\therefore\frac{2s^3-8t\cdot s}{(4t+3)s^2-(4t-1)}=\frac{2s^3-6s}{6s^2-2}$$

(3)[別解 1] 15 点

分数のまま係数比較をする方針‥5 点

となる。これが s についての恒等式となれば良いから，両辺の係数を比較して

$$\begin{cases} 8t = 6 \\ 4t + 3 = 6 \\ 4t - 1 = 2 \end{cases}$$

となる。

これを解くと $t = \frac{3}{4}$ となり，$t > 0$ を満たす。　　・・・(答)

(3)[別解 2]

以下では，放物線 C_0 と直線 L_0 が異なる 2点で交わる条件

$$s^2 - 4t > 0$$

を考慮せずに $\tan(\theta_1 - \theta_2) = \tan 3\gamma$ が恒等的に成り立つ条件を考える。(1), (2)の結果を代入して

$$\frac{2s^3 - 8st}{1 + 3s^2 - 4t + 4s^2 t} = \frac{3s - s^3}{1 - 3s^2}$$

となる。 $s = 1$ を代入すると

$$\frac{2 - 8t}{1 + 3 - 4t + 4t} = \frac{3 - 1}{1 - 3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1 - 4t}{2} = -1$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{3}{4}$$

となる。逆に，$t = \frac{3}{4}$ のとき，

$$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{2s^3 - 8s \cdot \frac{3}{4}}{1 + 3s^2 - 4 \cdot \frac{3}{4} + 4s^2 \cdot \frac{3}{4}}$$
$$= \frac{2s^3 - 6s}{6s^2 - 2}$$
$$= \frac{3s - s^3}{1 - 3s^2}$$

より，$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \tan 3\gamma$ が恒等的に成り立つ。よって 求める値は

$t = \frac{3}{4}$ である。　　・・・(答)

係数比較‥5 点

答‥5 点

(3)[別解 2]　15 点

s の値を具体的に代入して求める方針‥5 点

$t = \frac{3}{4}$ のとき確かに成り立つことを確認‥5 点

答‥5 点