２０２３年　第一回東工大本番レベル模試・数学

解答・解説・採点基準

全５問　１８０分　３００点満点

１　（６０点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，導出過程と結論の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

(1)

和と積の公式および２倍角の公式より

$$f(\theta)=(\sin 5\theta+\sin\theta)+(\sin 4\theta+\sin 2\theta)+a\sin 3\theta$$

$$=2\sin\frac{5\theta+\theta}{2}\cos\frac{5\theta-\theta}{2}+2\sin\frac{4\theta+2\theta}{2}\cos\frac{4\theta-2\theta}{2}+a\sin 3\theta \quad \text{(A)}$$

$$=2\sin 3\theta\cos 2\theta+2\sin 3\theta\cos\theta+a\sin 3\theta$$

$$=\sin 3\theta(2\cos 2\theta+2\cos\theta+a)$$

$$=\sin 3\theta\{2(2\cos^2\theta-1)+2\cos\theta+a\}$$

$$=\sin 3\theta(4\cos^2\theta+2\cos\theta+a-2) \quad \text{(B)}$$

となるから，a の値によらず

$$f\left(\frac{m}{3}\pi\right)=\sin\left(3\cdot\frac{m}{3}\pi\right)\left(4\cos^2\frac{m}{3}\pi+2\cos\frac{m}{3}\pi+a-2\right)$$
$$=\sin m\pi\left(4\cos^2\frac{m}{3}\pi+2\cos\frac{m}{3}\pi+a-2\right) \quad \text{(C)}$$
$$=0$$

が成り立つ。したがって，$\theta=\dfrac{m}{3}\pi$ は a の値によらず $f(\theta)=0$ の実数解となる。

(証明終)

(1)　20 点（A）(B)(C)

(A)和と積の公式を正しく用いる‥5 点

・ $\sin 5\theta=\sin(3\theta+2\theta)$，$\sin\theta=\sin(3\theta-2\theta)$，$\sin 4\theta=\sin(3\theta+\theta)$，$\sin 2\theta=\sin(3\theta-\theta)$ **を加法定理で展開してても可**

(B) $f(\theta)$ が因数 $\sin 3\theta$ を持つことを示す‥5 点

・解答のように式で示す場合で計算結果が誤りの場合は，$f(\theta)$ が因数 $\sin 3\theta$ を持つかどうか不明なので不可

・因数 $4\cos^2\theta+2\cos\theta+a-2$ の部分は他の同値な表現でも可

(C) $f\left(\dfrac{m}{3}\pi\right)=0$ を示す‥10 点

(1)[別解 1]

複素数 α の虚部を $\mathrm{Im}(\alpha)$ と表す。複素数 z に対して $z=\cos\theta+i\sin\theta$

(1)[別解 1]　20 点（A1）(B)(C)

とおくと，ド・モアブルの定理より

$$f(\theta)=\mathrm{Im}\left(z+z^2+az^3+z^4+z^5\right)$$ (A1)

となる。ここで

$$z^{-1}+z=\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}+(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$=2\cos\theta$$

に注意すると

$$\begin{aligned}&z+z^2+az^3+z^4+z^5\\&=z^3\left(z^{-2}+z^{-1}+a+z+z^2\right)\\&=z^3\left\{\left(z^{-1}+z\right)^2+\left(z^{-1}+z\right)+a-2\right\}\\&=(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)\left\{(2\cos\theta)^2+2\cos\theta+a-2\right\}\\&=\cos 3\theta\left(4\cos^2\theta+2\cos\theta+a-2\right)\\&\ +i\sin 3\theta\left(4\cos^2\theta+2\cos\theta+a-2\right)\end{aligned}$$

となるから

$$f(\theta)=\sin 3\theta\left(4\cos^2\theta+2\cos\theta+a-2\right)$$ (B)

が得られる。

(本解と共通)(C)

(A1) $f(\theta)=\mathrm{Im}\left(z+z^2+az^3+z^4+z^5\right)$ **‥5 点**

(B) $f(\theta)$ **が因数** $\sin 3\theta$ **を持つことを示す‥5 点**

(C)‥10 点

(1)[別解 2]

$f(\theta)=\sin\theta+\sin 2\theta+a\sin 3\theta+\sin 4\theta+\sin 5\theta$ に $\theta=\dfrac{m}{3}\pi$ を代入すると

$$\begin{aligned}f\left(\frac{m}{3}\pi\right)&=\sin\frac{m}{3}\pi+\sin\left(2\cdot\frac{m}{3}\pi\right)+a\sin\left(3\cdot\frac{m}{3}\pi\right)\\&\quad+\sin\left(4\cdot\frac{m}{3}\pi\right)+\sin\left(5\cdot\frac{m}{3}\pi\right)\\&=\sin\frac{m}{3}\pi+\sin\frac{2m}{3}\pi+a\sin m\pi\\&\quad+\sin\left(2m\pi-\frac{2m}{3}\pi\right)+\sin\left(2m\pi-\frac{m}{3}\pi\right)\end{aligned}$$

$$=\sin\frac{m}{3}\pi+\sin\frac{2m}{3}\pi+0-\sin\frac{2m}{3}\pi-\sin\frac{m}{3}\pi$$ (A2)

$$=0$$ (C)

となる。この計算結果は a, m の値に依存しないことから，問いの主張が示された。

(証明終)

(1)[別解 2]　20 点 (A2)(C)

(A2) $\sin\dfrac{5m}{3}\pi=-\sin\dfrac{m}{3}\pi$ **および**

$\sin\dfrac{4m}{3}\pi=-\sin\dfrac{2m}{3}\pi$ **を用いる‥10 点**

(各 5 点×2)

(C) $f\left(\dfrac{m}{3}\pi\right)=0$ **を示す‥10 点**

(1)[別解 3]

(1)[別解 3]　20 点 (D)(E)(F)

任意の整数 m に対して，m を6で割った商を q_m，余りを r_m とおくと，$f(\theta)=f(\theta+2k\pi)$（$k$ は整数）より

$$f\left(\frac{m}{3}\pi\right)=f\left(\frac{6q_m+r_m}{3}\pi\right)$$
$$=f\left(\frac{r_m}{3}\pi+2q_m\pi\right)$$
$$=f\left(\frac{r_m}{3}\pi\right)$$

が成り立つから，合成関数 $f(\theta(m))=(f\circ\theta)(m)$ は周期6の周期関数である(D)。したがって，$m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ 3$ すなわち

$\theta=0,\ \pm\frac{\pi}{3},\ \pm\frac{2}{3}\pi,\ \pi$ に対して $f(\theta)=0$ を示せば十分である(E)。以下，複号同順とする。

$$f(0)=\sin 0+\sin 0+a\sin 0+\sin 0+\sin 0$$
$$=0$$

$$f\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\pm\frac{2}{3}\pi\right)+a\sin(\pm\pi)$$
$$+\sin\left(\pm\frac{4}{3}\pi\right)+\sin\left(\pm\frac{5}{3}\pi\right)$$
$$=\pm\sin\frac{\pi}{3}\pm\sin\frac{2}{3}\pi+0\pm\sin\left(2\pi-\frac{2}{3}\pi\right)\pm\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\pm\sin\frac{\pi}{3}\pm\sin\frac{2}{3}\pi\mp\sin\frac{2}{3}\pi\mp\sin\frac{\pi}{3}$$
$$=0$$

$$f\left(\pm\frac{2}{3}\pi\right)$$
$$=\sin\left(\pm\frac{2}{3}\pi\right)+\sin\left(\pm\frac{4}{3}\pi\right)+a\sin(\pm2\pi)$$
$$+\sin\left(\pm\frac{8}{3}\pi\right)+\sin\left(\pm\frac{10}{3}\pi\right)$$
$$=\pm\sin\frac{2}{3}\pi\pm\sin\frac{4}{3}\pi+0\pm\sin\left(4\pi-\frac{4}{3}\pi\right)\pm\sin\left(4\pi-\frac{2}{3}\pi\right)$$
$$=\pm\sin\frac{2}{3}\pi\pm\sin\frac{4}{3}\pi\mp\sin\frac{4}{3}\pi\mp\sin\frac{2}{3}\pi$$
$$=0$$

$$f(\pi)=\sin\pi+\sin(2\pi)+a\sin(3\pi)+\sin(4\pi)+\sin(5\pi)$$
$$=0$$ (F)

となる。以上より，問いの主張が示された。

(証明終)

(D) 合成関数 $f(\theta(m))$ は周期 $6l$（l は正の整数）の周期関数であることを示す‥**5点**

・周期は $12,\ 18$ 等も可

(E) $\theta=0,\ \pm\frac{\pi}{3},\ \pm\frac{2}{3}\pi,\ \pi$ で $f(\theta)=0$ が成り立てばよいことを述べる‥**5点**

・(D)で求めた合成関数 $f(\theta(m))$ の周期を踏まえて，$f(\theta_n)=0$ を示せば問の要求を満たすような θ_n $(n=1,\ 2,\ \cdots,\ i)$ であれば，上述の θ でなくても可

(F) $\theta=0,\ \pm\frac{\pi}{3},\ \pm\frac{2}{3}\pi,\ \pi$ で $f(\theta)=0$ を示す‥**10点**（完答）

(2)

(2)　**40点**　(A)(B)(C)(D)(E)

(1)の過程より

$$f(\theta)=0$$
$$\Leftrightarrow \sin 3\theta\left(4\cos^2\theta+2\cos\theta+a-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3\theta=0 & \cdots ① \\ \text{または} & \\ 4\cos^2\theta+2\cos\theta+a-2=0 & \cdots ② \end{cases}$$

(A)

となる。まず，①について

$$\sin 3\theta=0$$
$$\Leftrightarrow \theta=0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi,\ \pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$$

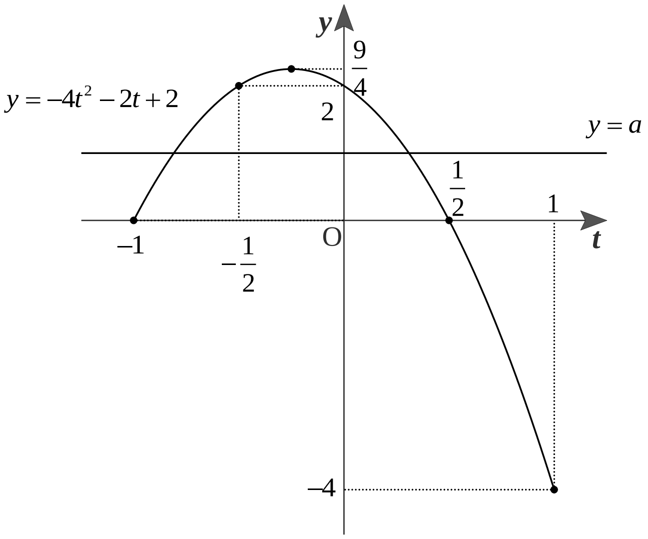
より 6 個の実数解がある(B)。ここで，これらの θ のとき

$$\cos\theta=\pm 1,\ \pm\frac{1}{2}$$

になることに注意する。続いて②の解の個数を考える。$t=\cos\theta$ とおくと $-1\leqq t\leqq 1$ であり，t と θ は $t=\pm 1$ のときは一対一対応，$-1<t<1$ のときは一対二対応する。このとき，②は

$$4\cos^2\theta+2\cos\theta+a-2=0$$
$$\Leftrightarrow -4t^2-2t+2=a$$
$$\Leftrightarrow -4\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{4}=a \qquad \cdots ③$$

となる。ここで，放物線 $y=-4t^2-2t+2\ (-1\leqq t\leqq 1)$ と直線 $y=a$ のグラフは下図のようになる。



③の実数解の個数は放物線 $y=-4t^2-2t+2\ (-1\leqq t\leqq 1)$ と直線 $y=a$ の共有点の個数と等しいことと，前述の t と θ の対応関係をふまえ

(A)「$f(\theta)=0\Leftrightarrow$ ①または②」を利用する‥10 点

(B)①の解は $\theta=0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi,\ \pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$ の 6 個‥5 点(完答)

・必ずしも答案内の 1 箇所で述べる必要はなく，①を満たす具体的な θ の値と個数が答案内のどこかですべて記されていれば可

ると，②の実数解の個数は $0<a<\frac{9}{4}$ のとき最大の4個(C)となる。また，$0<a<\frac{9}{4}$ の範囲において $a=2$ のとき①と②を同時に満たす実数解が存在する(D)ことが上図からわかるため，$f(\theta)=0$ の実数解の個数は

$$0<a<2,\ 2<a<\frac{9}{4}$$

のとき最大の

$$6+4=10\ (\text{個})$$

となる。

(答) $0<a<2,\ 2<a<\frac{9}{4}$ のとき，最大10個(E)

(C)②の解の個数は $0<a<\frac{9}{4}$ のとき最大の4個‥10点

(D) $0<a<\frac{9}{4}$ のもとで，$a=2$ のとき①と②で重複する実数解が存在する‥5点

・a を実数全体で考えている場合は解が重複する $a=-4,\ 0$ のケースも考慮する必要がある

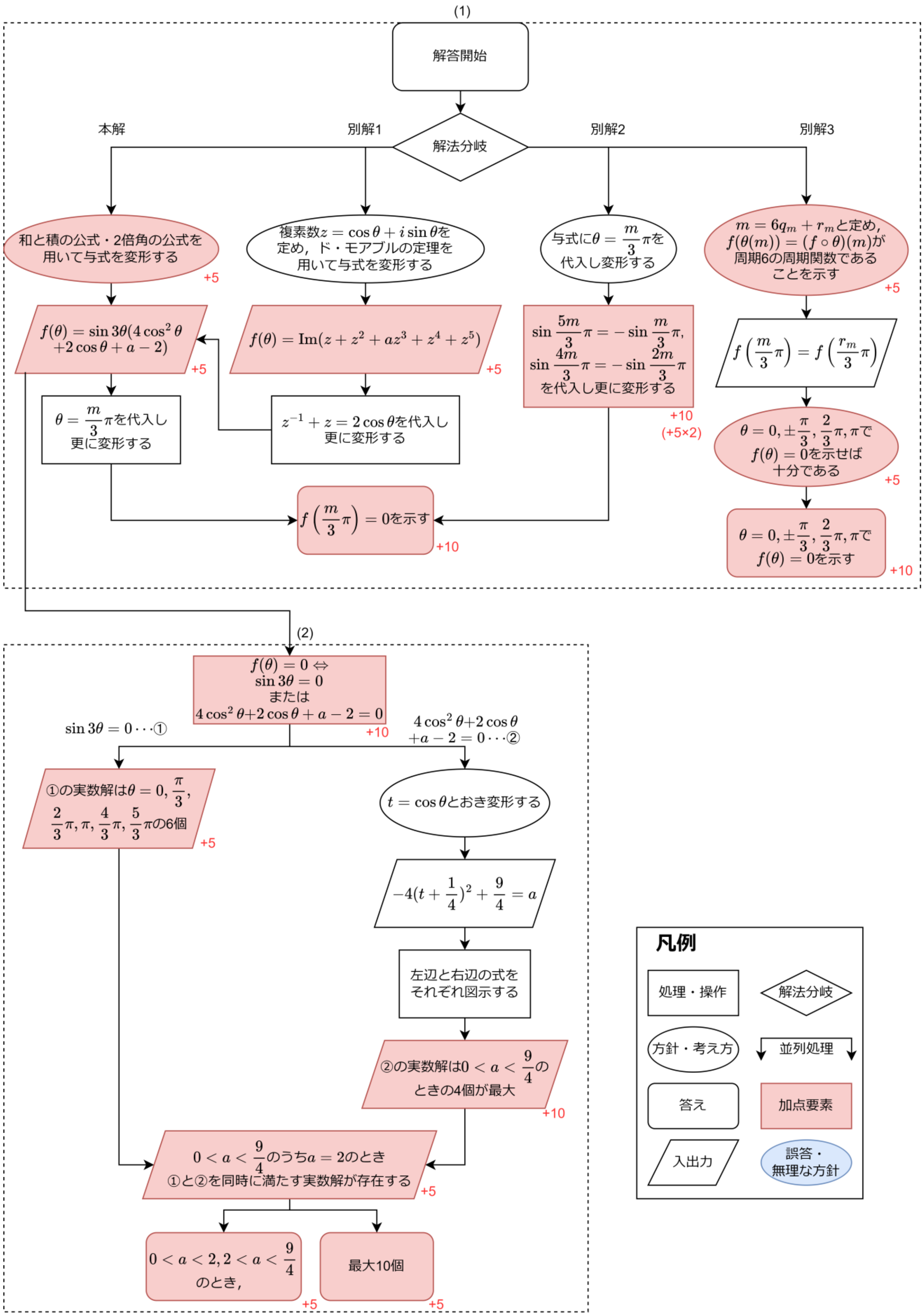
(E)答‥10点(各5点×2)

・$0<a<2,\ 2<a<\frac{9}{4}$ に5点(完答)

・最大値10個に5点

【解説】<<テーマ>>三角関数・方程式の実数解の個数

〔解法フロー〕



(1)
解答開始
解法分岐
本解
別解1
別解2
別解3
和と積の公式・2倍角の公式を用いて与式を変形する
+5
複素数$z=\cos\theta+i\sin\theta$を定め，ド・モアブルの定理を用いて与式を変形する
与式に$\theta=\frac{m}{3}\pi$を代入し変形する
$m=6q_m+r_m$と定め，$f(\theta(m))=(f\circ\theta)(m)$が周期6の周期関数であることを示す
+5
$f(\theta)=\sin 3\theta(4\cos^2\theta+2\cos\theta+a-2)$
+5
$f(\theta)=\mathrm{Im}(z+z^2+az^3+z^4+z^5)$
+5
$\sin\frac{5m}{3}\pi=-\sin\frac{m}{3}\pi$, $\sin\frac{4m}{3}\pi=-\sin\frac{2m}{3}\pi$を代入し更に変形する
+10
(+5×2)
$f\left(\frac{m}{3}\pi\right)=f\left(\frac{r_m}{3}\pi\right)$
$\theta=\frac{m}{3}\pi$を代入し更に変形する
$z^{-1}+z=2\cos\theta$を代入し更に変形する
$\theta=0,\pm\frac{\pi}{3},\frac{2}{3}\pi,\pi$で$f(\theta)=0$を示せば十分である
+5
$f\left(\frac{m}{3}\pi\right)=0$を示す
+10
$\theta=0,\pm\frac{\pi}{3},\frac{2}{3}\pi,\pi$で$f(\theta)=0$を示す
+10
(2)
$f(\theta)=0\Leftrightarrow \sin 3\theta=0$ または $4\cos^2\theta+2\cos\theta+a-2=0$
+10
$\sin 3\theta=0\cdots$①
$4\cos^2\theta+2\cos\theta+a-2=0\cdots$②
①の実数解は$\theta=0,\frac{\pi}{3},\frac{2}{3}\pi,\pi,\frac{4}{3}\pi,\frac{5}{3}\pi$の6個
+5
$t=\cos\theta$とおき変形する
$-4(t+\frac{1}{4})^2+\frac{9}{4}=a$
左辺と右辺の式をそれぞれ図示する
②の実数解は$0<a<\frac{9}{4}$のときの4個が最大
+10
$0<a<\frac{9}{4}$のうち$a=2$のとき①と②を同時に満たす実数解が存在する
+5
$0<a<2, 2<a<\frac{9}{4}$のとき，
+5
最大10個
+5
凡例
処理・操作
解法分岐
方針・考え方
並列処理
答え
加点要素
入出力
誤答・無理な方針

2 （６０点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，導出過程と結論の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

(1)

直線ABの方程式は，

$$y-k=\frac{1-k-k}{k-0}x\ (\because k\neq 0)$$
$$\Leftrightarrow y=\left(\frac{1}{k}-2\right)x+k$$

である。また点A, Bの x 座標を考えれば，線分AB上の点の x 座標のとりうる範囲は，$0\leqq x\leqq k$ である。

(答) 線分AB上の点の x 座標のとりうる範囲：$0\leqq x\leqq k$ (A)

直線ABの方程式：$y=\left(\frac{1}{k}-2\right)x+k$ (B)

(1)　10点 (A)(B)

(A)線分AB上の点の x 座標のとりうる範囲を求める‥5点

(B)直線ABの方程式を求める‥5点

・必ずしも $y=$ の形で整理している必要はない

(2)

ある t のときの線分ABを，以後 l_t と呼ぶことにする。l_0 は $(0,0),(0,1)$ を結ぶ線分である。ここで，点 (x,y) が領域に含まれている条件を考える。

まず $x\neq 0$ の場合を考える。l_0 は $x=0$ 上にあるから，$l_t\ (t>0)$ が (x,y) を通ることだけ考えればよい。そのような t は(1)から $0\leqq x\leqq 1$ （$x\neq 0$ と合わせて $0<x\leqq 1$）のときにのみ存在し，$x\leqq t\leqq 1$ なるものに限られる。よって

$0<x\leqq 1$ かつ「ある $t\ (x\leqq t\leqq 1)$ に対し，$y=\left(\frac{1}{t}-2\right)x+t$ となる」

(A)

が (x,y) が領域に含まれている条件である。ここで

$g(t)=\left(\frac{1}{t}-2\right)x+t$ とおいて，$g(t)$ の $x\leqq t\leqq 1$ でのとりうる範囲を考える。$g'(t)=\frac{t^2-x}{t^2}$ より，$0<x\leqq 1$ において，$x\leqq\sqrt{x}\leqq 1$ であることに注意して，増減表は以下のようになる。(B)

(2)　40点 (A)(B)(C)(D)(E)

(A)領域に点 (x,y) が含まれる条件を数式で正しく記述する‥5点

・解答では $x\neq 0$ の下での条件を書いているが，一般の場合について書いていても問題ない。その場合(D)の加点もここで行う。

・[注1]

(B) $g(t)$ の動く範囲を正しく求める‥15点

・増減表は必須ではないが，その場合増

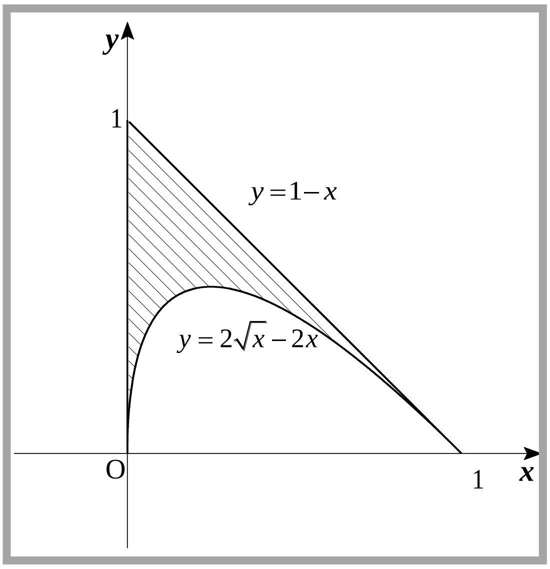
t	x	$\cdots$	$\sqrt{x}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	$1-x$	↘	$2\sqrt{x}-2x$	↗	$1-x$

よって，$(x,\ y)$が領域に含まれている条件は

$0<x\leqq 1$　かつ　$2\sqrt{x}-2x\leqq y\leqq 1-x$

となる。(C)

最後に$x=0$のときを考える。l_0によって$0\leqq y\leqq 1$の点が含まれており，$l_t\ (t>0)$によって$(0,\ t)$が含まれているから，$0\leqq y\leqq 1$が条件である。(D)以上を合わせ，求める領域を図示すると以下の斜線部となる。ただし，境界は含む。



(E)

(答)　上図

減について文章で言及する必要がある

(C) $x\neq 0$**の場合の条件を数式で正確に記述する‥10点**

・一般の場合について，条件を数式で正しく記載できていれば，加点する。誤っていても，$x\neq 0$**に限れば正しい条件であるなら，(C)の要素は満たしているとしてよい。**

(D) $x=0$**の場合の条件を数式で正確に記述する‥5点**

(E)図示‥5点

(2)[別解]

あるtのときの線分 AB を，以後l_tと呼ぶことにする。l_0は$(0,\ 0),\ (0,\ 1)$を結ぶ線分である。$t>0$のときに，l_tが通過する領域を考える。(1)より，l_tは，

$$\begin{cases} y=\left(\dfrac{1}{t}-2\right)x+t \\ 0\leqq x\leqq t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2-(2x+y)t+x=0 \\ 0\leqq x\leqq t \end{cases} (\because t>0)$$

を満たす。ここで$f(t)=t^2-(2x+y)t+x$とすると，tに関する２次方程式，$f(t)=0$が$0<t\leqq 1$で，$0\leqq x\leqq t$を満たすような解を持つような，$(x,\ y)$を求めればよい。(A1)

$x>0$の場合を考えると，$f(t)=0$が$0<x\leqq t\leqq 1$で解を持つ条件

(2)[別解]　40点　(A1)(F)(G)(C)(D)(E)

(A1)領域に点$(x,\ y)$**が含まれる条件を数式で正しく記述する‥5点**

・$t>0$**の場合についての条件のみを求めれば加点**

を考えればよい。(F)範囲によらず解を持つ条件は，判別式を D として

$$
\begin{aligned}
&D \geqq 0 \\
&\Leftrightarrow (2x+y)^2 - 4x \geqq 0 \\
&\Leftrightarrow (2x+y)^2 \geqq 4x \\
&\Leftrightarrow |2x+y| \geqq 2\sqrt{x} \, (\because x>0)
\end{aligned}
$$

となる。ここで解の範囲で場合分けを行う。

[1]　$t<x,\ t=x$ でそれぞれ1つずつ解を持つ場合

条件は

$$
\begin{cases} \frac{1}{2}(2x+y) < x \\ f(x) = 0 \end{cases}
\Leftrightarrow \begin{cases} y<0 \\ -x^2 - yx + x = 0 \end{cases}
\Leftrightarrow \begin{cases} y<0 \\ y = 1-x \end{cases} (\because x>0)
$$

となる。(G 1/5)

[2]　$t<x,\ x<t \leqq 1$ でそれぞれ1つずつ解を持つ場合

条件は

$$
\begin{cases} f(x) < 0 \\ f(1) \geqq 0 \end{cases}
\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 - yx + x < 0 \\ 1 - x - y \geqq 0 \end{cases}
\Leftrightarrow \begin{cases} y > 1-x \\ y \leqq 1-x \end{cases}
$$

となり，満たすものはない。(G 2/5)

[3]　$x \leqq t \leqq 1$ で2つ解を持つ(重解も可)場合

条件は

$$
\begin{cases} x \leqq \frac{1}{2}(2x+y) \leqq 1 \\ f(x) \geqq 0 \\ f(1) \geqq 0 \end{cases}
\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqq y \leqq 2-2x \\ y \leqq 1-x \end{cases}
$$

となる。(G 3/5)

[4]　$x \leqq t < 1,\ 1 < t$ でそれぞれ1つずつ解を持つ場合

条件は

(F) t の2次方程式として解釈して，解の存在条件に正しく言い換える‥5点

・ $x>0$ の場合のみの条件でよい

・解答と違い， $x=0$ について言及しても(D)の加点は行わない($t=0$ の場合が考慮外なため)

$$\begin{cases} f(x) \geqq 0 \\ f(1) < 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leqq 1-x \\ y > 1-x \end{cases}$$

となり，満たすものはない。(G 4/5)

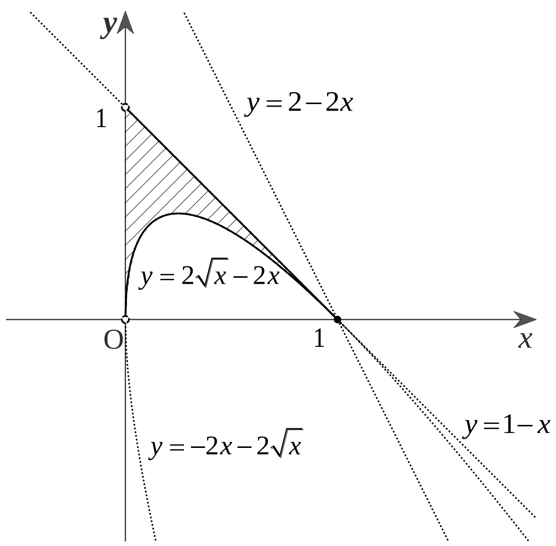
[5] $t=1,\ 1<t$ でそれぞれ1つずつ解を持つ場合

条件は

$$\begin{cases} 1 < \frac{1}{2}(2x+y) \\ f(1) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y > 2-2x \\ y = 1-x \end{cases}$$

となる。(G 5/5)

$0<x\leqq 1$ に気を付けて，以上を総合すると，$f(t)=0$ が $x\leqq t\leqq 1$ で解を持つ $(x,\ y)$ は下図の斜線部の範囲となる。ただし，y 軸上以外の境界は含み，y 軸上の境界は含まない。



よって，$(x,\ y)$ が領域に含まれている条件は

$$0 < x \leqq 1 \quad \text{かつ} \quad 2\sqrt{x} - 2x \leqq y \leqq 1-x$$

となる。(C)

(以下 $x=0$ の場合を考える以降の過程は本解と同様)(D)(E)

(G)[1]～[5]の場合の条件を正しく求める‥10 点(完答)

・3 個以上の場合分けで正しく求められていれば 5 点

・場合分けの方針が違う場合でも，完答で 10 点，ミスが 2 か所以内であれば 5 点

(C) $x \neq 0$ の場合の条件を数式で正確に記述する‥10 点

(D)(E)本解と同様‥10 点

(3)

求める面積は

$$\int_0^1 \left\{1-x-\left(2\sqrt{x}-2x\right)\right\} dx \ \text{(A)}$$

(3) 10 点 (A)(B)

(A)正しい被積分区間と積分区間‥5 点

$$= \int_0^1 \left(1 - 2\sqrt{x} + x\right) dx$$

$$= \left[x - \frac{4}{3} x\sqrt{x} + \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{6}$$

となる。

(答) $\frac{1}{6}$ (B)

(B)答‥5 点

【解説】<<テーマ>>領域

〔配点の詳細〕

(2) [注 1]

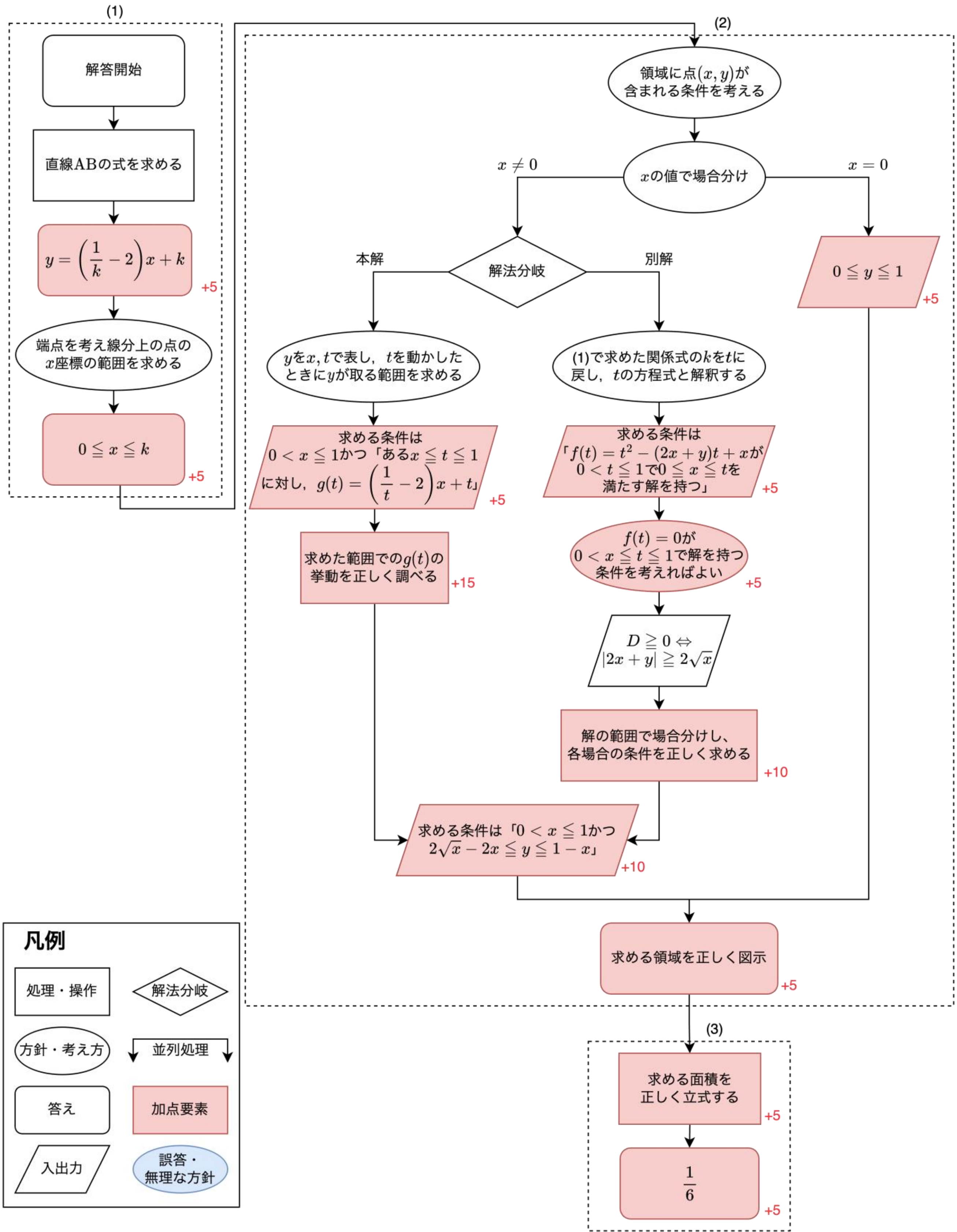
以下は $x=0$ を例外としなかった場合に考えられる条件の例である。

$(x, y)=0$ または『$0 \leqq x \leqq 1$ かつ「ある $x \leqq t \leqq 1$ を満たす $t>0$ に対し，$y=\left(\frac{1}{t}-2\right)x+t$ となる」』

「$x=0$ かつ $0 \leqq y \leqq 1$」または『$0<x \leqq 1$ かつ「ある $x \leqq t \leqq 1$ に対し，$y=\left(\frac{1}{t}-2\right)x+t$ となる」』

以上と一致していなくても，同値であれば加点する。一般の場合の条件を誤って書いているが，$x=0$ に限れば正しい条件を書いている場合は，(D)の要素だけ加点する。また，$x \neq 0$ に限れば正しい条件を書いている場合も同様に，(A)の要素だけ加点する。

〔解法フロー〕


(1)
解答開始
直線ABの式を求める
$y=\left(\frac{1}{k}-2\right)x+k$
+5
端点を考え線分上の点のx座標の範囲を求める
$0 \leqq x \leqq k$
+5
(2)
領域に点(x,y)が含まれる条件を考える
xの値で場合分け
$x \neq 0$
$x=0$
解法分岐
本解
別解
$0 \leqq y \leqq 1$
+5
yをx,tで表し，tを動かしたときにyが取る範囲を求める
(1)で求めた関係式のkをtに戻し，tの方程式と解釈する
求める条件は$0<x \leqq 1$かつ「ある$x \leqq t \leqq 1$に対し，$g(t)=\left(\frac{1}{t}-2\right)x+t$」
+5
求める条件は「$f(t)=t^2-(2x+y)t+x$が$0<t \leqq 1$で$0 \leqq x \leqq t$を満たす解を持つ」
+5
求めた範囲での$g(t)$の挙動を正しく調べる
+15
$f(t)=0$が$0<x \leqq t \leqq 1$で解を持つ条件を考えればよい
+5
$D \geqq 0 \Leftrightarrow |2x+y| \geqq 2\sqrt{x}$
解の範囲で場合分けし、各場合の条件を正しく求める
+10
求める条件は「$0<x \leqq 1$かつ$2\sqrt{x}-2x \leqq y \leqq 1-x$」
+10
求める領域を正しく図示
+5
(3)
求める面積を正しく立式する
+5
$\frac{1}{6}$
+5
凡例
処理・操作
解法分岐
方針・考え方
並列処理
答え
加点要素
入出力
誤答・無理な方針

3 （６０点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，導出過程と結論の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

(1)

まず，x, y, z を $1 \leqq x < y < z$ を満たす正の整数として考える。このとき，

$$0 < \frac{1}{z} < \frac{1}{y} < \frac{1}{x} \leqq 1$$

が成立するから，

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{3}{x}$$
$$\therefore 1 < x < 3$$

が必要である。よって，x の候補は 2 のみ(A)である。このとき，(＊)は

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$$

と変形できる。同様に考えると，

$$\frac{1}{y} < \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{2}{y}$$
$$\therefore 2 < y < 4$$

が必要であるから，y の候補は 3 のみである。このとき，$z = 6$ で(＊)が成り立つ。したがって，$x < y < z$ のもとでの求める組は，

$$(x,\ y,\ z) = (2,\ 3,\ 6)$$

である。ここで，x, y, z の対称性より，x, y, z の大小関係を入れ替えた組も題意を満たす組となるから，求める組は

$$(x,\ y,\ z) = (2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 6,\ 3),\ (3,\ 2,\ 6),\ (3,\ 6,\ 2),\ (6,\ 2,\ 3),\ (6,\ 3,\ 2)$$

の 6 組である。

(答) $(x,\ y,\ z) = (2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 6,\ 3),\ (3,\ 2,\ 6),\ (3,\ 6,\ 2),\ (6,\ 2,\ 3),\ (6,\ 3,\ 2)$ (B)

(1)　20 点 (A)(B)

(A) x の候補が $x = 2$ のみであることを導出する‥10 点

$(y-2)(z-2) = 4$
$\therefore (y-2,\ z-2) = (1,\ 4)$ **とする方針も可**

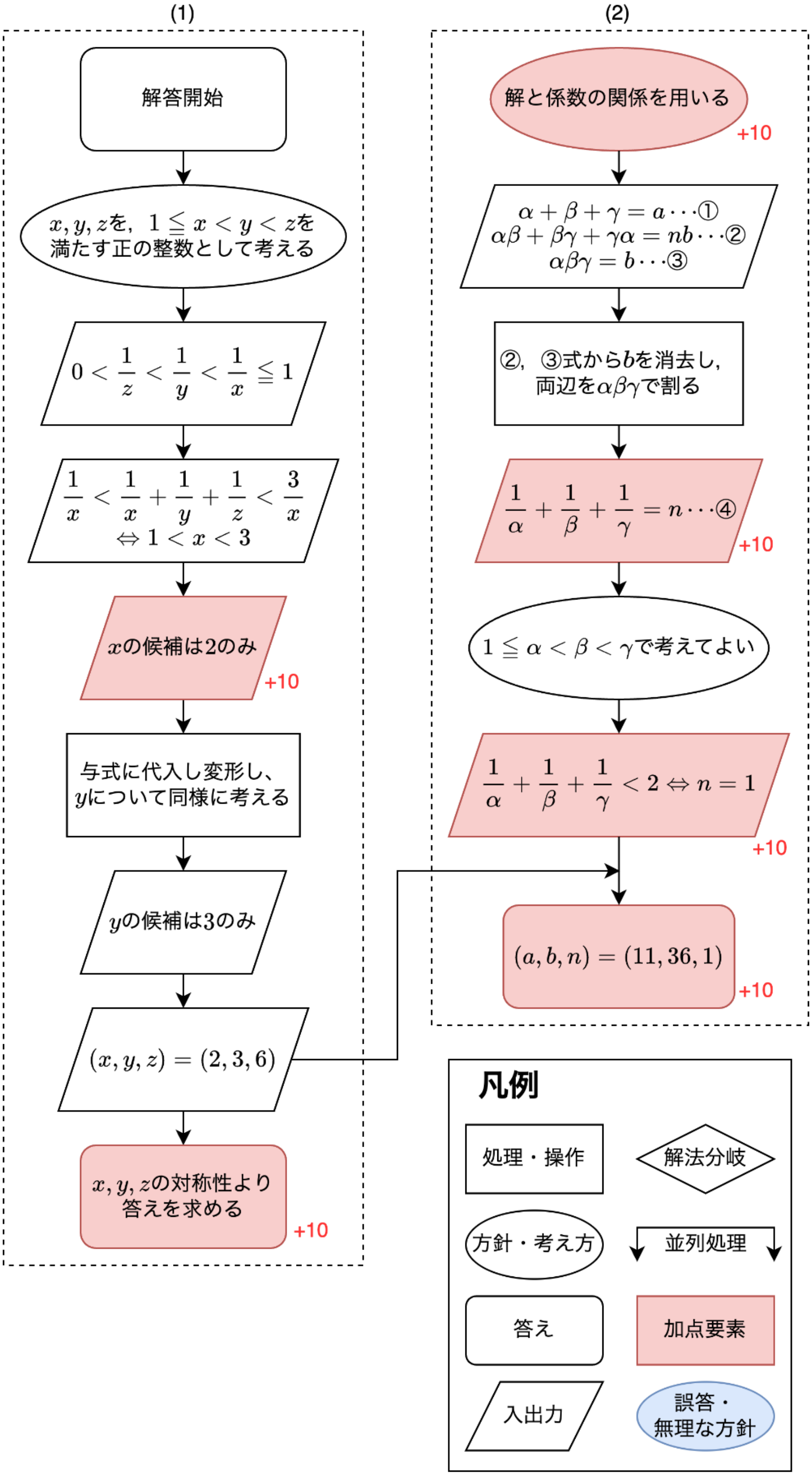
(B)答‥10 点

(6 組答えていない場合は 5 点)

(2) (＊＊)の 3 つの解を α, β, γ とおく。このとき, 3 次方程式の解と係数の関係より, (A) $\alpha+\beta+\gamma=a$ ・・・① $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=nb$ ・・・② $\alpha\beta\gamma=b$ ・・・③ が成立する。よって, ①, ②, ③を同時に満たすような相異なる 3 つの正の整数 α, β, γ が存在するための条件を求めればよい。まず, ②, ③から b を消去すると, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=n\alpha\beta\gamma$ $\Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=n \ (\because \alpha\beta\gamma>0)$ (B) ・・・④ が得られる。ここで, (＊＊)が相異なる 3 つの正の整数解を持つとき, $1 \leqq \alpha<\beta<\gamma$ として考えてよく，このもとで $2 \leqq \beta$, $3 \leqq \gamma$ を満たすから, $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma} \leqq \dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{11}{6}<2$ が成り立つ。したがって, ②, ③が成り立つための必要条件は, $n=1$ (C)であり，このとき④は, $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=1$ である。ここで, (1)より, α, β, γ が相異なる 3 つの正の整数となるのは, $(\alpha, \beta, \gamma)=(2, 3, 6)$ の場合に限られる。このとき, ①, ③より $(a, b)=(11, 36)$ であれば条件を満たす。以上より，求める必要十分条件は $(a, b, n)=(11, 36, 1)$ である。 (答) $(a, b, n)=(11, 36, 1)$ (D)	(2) 40 点 (A)(B)(C)(D) (A)解と係数の関係を利用する‥10 点 (B)④式を導出する‥10 点 (C) $n=1$ を導出する‥10 点 (D)答‥10 点

【解説】<<テーマ>>整数

〔解法フロー〕


(1)
解答開始
x, y, zを，$1 \leqq x < y < z$を満たす正の整数として考える
$0 < \frac{1}{z} < \frac{1}{y} < \frac{1}{x} \leqq 1$
$\frac{1}{x} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{3}{x}$
$\Leftrightarrow 1 < x < 3$
xの候補は2のみ
+10
与式に代入し変形し、yについて同様に考える
yの候補は3のみ
$(x, y, z) = (2, 3, 6)$
x, y, zの対称性より答えを求める
+10
(2)
解と係数の関係を用いる
+10
$\alpha + \beta + \gamma = a \cdots$①
$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = nb \cdots$②
$\alpha\beta\gamma = b \cdots$③
②，③式からbを消去し，両辺を$\alpha\beta\gamma$で割る
$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = n \cdots$④
+10
$1 \leqq \alpha < \beta < \gamma$で考えてよい
$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} < 2 \Leftrightarrow n = 1$
+10
$(a, b, n) = (11, 36, 1)$
+10
凡例
処理・操作
解法分岐
方針・考え方
並列処理
答え
加点要素
入出力
誤答・無理な方針

4 （６０点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，導出過程と結論の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

(1)

操作(P), (Q), (R)より

$$\begin{cases} \alpha_{n+1}-\dfrac{1}{2}(\beta_n+\alpha_n)=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)(\gamma_n-\beta_n) \\ \beta_{n+1}-\dfrac{1}{2}(\gamma_n+\beta_n)=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)(\alpha_n-\gamma_n) \\ \gamma_{n+1}-\dfrac{1}{2}(\alpha_n+\gamma_n)=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)(\beta_n-\alpha_n) \end{cases} \text{(A)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_{n+1}=\dfrac{1}{2}w^{-1}(\gamma_n-\beta_n)+\dfrac{1}{2}(\beta_n+\alpha_n) \\ \beta_{n+1}=\dfrac{1}{2}w^{-1}(\alpha_n-\gamma_n)+\dfrac{1}{2}(\gamma_n+\beta_n) \\ \gamma_{n+1}=\dfrac{1}{2}w^{-1}(\beta_n-\alpha_n)+\dfrac{1}{2}(\alpha_n+\gamma_n) \end{cases}$$

である。

$$\begin{aligned} -w^{-1}+1&=-\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}+1 \\ &=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ &=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3} \\ &=w \end{aligned}$$

に注意して整理すると，

$$\begin{cases} \alpha_{n+1}=\dfrac{1}{2}\alpha_n+\dfrac{1}{2}w\beta_n+\dfrac{1}{2}w^{-1}\gamma_n \\ \beta_{n+1}=\dfrac{1}{2}w^{-1}\alpha_n+\dfrac{1}{2}\beta_n+\dfrac{1}{2}w\gamma_n \\ \gamma_{n+1}=\dfrac{1}{2}w\alpha_n+\dfrac{1}{2}w^{-1}\beta_n+\dfrac{1}{2}\gamma_n \end{cases}$$

を得る。重心を表す複素数は

(1)　20点 (A)(B)(C)

(A)操作(P)，(Q)，(R)を複素数 $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}, \gamma_{n+1}$，$\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ を用いて表す(完答)・・10点

・w や三角関数の表示形式や式の整理の有無は問わない

・(三角関数の値など)誤りが１箇所ある場合は５点

$$\frac{1}{3}(\alpha_{n+1}+\beta_{n+1}+\gamma_{n+1})$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(1+w+w^{-1})(\alpha_n+\beta_n+\gamma_n)$$
$$=\frac{1}{3}(\alpha_n+\beta_n+\gamma_n)$$

より n によらず定数である(B)から,

$$\frac{1}{3}(\alpha_n+\beta_n+\gamma_n)$$
$$=\frac{1}{3}(\alpha_0+\beta_0+\gamma_0)$$
$$=\frac{1}{3}(1+i)$$

である。

(答) $\frac{1}{3}(1+i)$ (C)

(B)重心を表す複素数が定数であることを示す方針‥5点

・数式のみでも可

・$\frac{1}{3}$ は無くても可

(C)答‥5点

(2)

$$w^2=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$$
$$=-\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$
$$=-w^{-1}$$
$$w^{-2}=\left\{\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right\}$$
$$=-\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=-w$$

に注意して整理すると

$$w\alpha_{n+1}+w^{-1}\beta_{n+1}+2\gamma_{n+1}$$
$$=\frac{1}{2}(w+w^{-2}+2w)\alpha_n+\frac{1}{2}(w^2+w^{-1}+2w^{-1})\beta_n$$
$$+\frac{1}{2}(1+1+2)\gamma_n$$
$$=\frac{1}{2}(3w+w^{-2})\alpha_n+\frac{1}{2}(w^2+3w^{-1})\beta_n+2\gamma_n$$
$$=\frac{1}{2}(3w-w)\alpha_n+\frac{1}{2}(-w^{-1}+3w^{-1})\beta_n+2\gamma_n$$
$$=w\alpha_n+w^{-1}\beta_n+2\gamma_n$$

より $w\alpha_n+w^{-1}\beta_n+2\gamma_n$ は n によらず定数である(A)から,

(2) 10点 (A)(B)

(A) $w\alpha_n+w^{-1}\beta_n+2\gamma_n$ が定数であることを示す方針‥5点

・数式のみでも可

$$w\alpha_n + w^{-1}\beta_n + 2\gamma_n$$
$$= w\alpha_0 + w^{-1}\beta_0 + 2\gamma_0$$
$$= \frac{1-\sqrt{3}i}{2} + 2i$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{4-\sqrt{3}}{2}i$$

である。

(答) $\frac{1}{2} + \frac{4-\sqrt{3}}{2}i$ (B)

(B)答‥5 点

(3)

(3) 10 点 (A)(B)

$$-w\alpha_{n+1} - w^{-1}\beta_{n+1} + \gamma_{n+1}$$
$$= \frac{1}{2}\left(-w - w^{-2} + w\right)\alpha_n + \frac{1}{2}\left(-w^2 - w^{-1} + w^{-1}\right)\beta_n$$
$$+ \frac{1}{2}\left(-1-1+1\right)\gamma_n$$
$$= -\frac{w^{-2}}{2}\alpha_n - \frac{w^2}{2}\beta_n - \frac{1}{2}\gamma_n$$
$$= -\frac{1}{2}\left(-w\alpha_n - w^{-1}\beta_n + \gamma_n\right) \left(\because w^2 = -w^{-1},\ w^{-2} = -w\right)$$

より数列 $\left\{-w\alpha_n - w^{-1}\beta_n + \gamma_n\right\}$ は公比 $-\frac{1}{2}$ (A), 初項

$$-w\alpha_0 - w^{-1}\beta_0 + \gamma_0 = -w^{-1} + i = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}+2}{2}i$$

の等比数列であるから,

$$-w\alpha_n - w^{-1}\beta_n + \gamma_n$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}+2}{2}i\right)$$

である。

(答) $\left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}+2}{2}i\right)$ (B)

(A) $\left\{-w\alpha_n - w^{-1}\beta_n + \gamma_n\right\}$ が公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列となることを示す方針‥5 点

・「等比数列」というフレーズなしに数式だけでも可

(B)答‥5 点

(4)

(4) 20 点 (A)(B)(C)(D)

(1), (2), (3)より

$$\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1 + i \quad \cdots ①$$

$$w\alpha_n + w^{-1}\beta_n + 2\gamma_n = \frac{1}{2} + \frac{4-\sqrt{3}}{2}i \quad \cdots ②$$

$$-w\alpha_n - w^{-1}\beta_n + \gamma_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}+2}{2}i\right) \quad \cdots ③$$

(A)(1), (2), (3) の結果を踏まえて, α_n, β_n, γ_n に関する 3 元の連立方程式に言い換えて‥5 点(完答)

・[注 1]

である。(A)②＋③より，

$$3\gamma_n=\frac{1}{2}+\frac{4-\sqrt{3}}{2}i+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}+2}{2}i\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\gamma_n=\frac{1+\left(4-\sqrt{3}\right)i}{6}\text{(B)}$$

を得る。①×w＋③より

$$\left(w-w^{-1}\right)\beta_n+\left(w+1\right)\gamma_n=\left(1+i\right)w+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}+2}{2}i\right)$$

$$\therefore \sqrt{3}i\beta_n=\left(1+i\right)\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)-\left(w+1\right)\gamma_n+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}+2}{2}i\right)$$

である。$n\to\infty$の極限をとると，

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\beta_n\\
&=-\frac{i}{\sqrt{3}}\left\{\frac{\left(1+i\right)\left(1+\sqrt{3}i\right)}{2}-\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+1\right)\cdot\frac{1+\left(4-\sqrt{3}\right)i}{6}\right\}\\
&=-\frac{i}{\sqrt{3}}\left\{\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)+\left(1+\sqrt{3}\right)i}{2}-\frac{3+\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{1+\left(4-\sqrt{3}\right)i}{6}\right\}\\
&=-\frac{\sqrt{3}}{3}i\left\{\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)+\left(1+\sqrt{3}\right)i}{2}-\frac{\left(6-4\sqrt{3}\right)+\left(12-2\sqrt{3}\right)i}{12}\right\}\\
&=-\frac{\sqrt{3}}{6}i\left\{\left(1-\sqrt{3}\right)+\left(1+\sqrt{3}\right)i-\frac{\left(3-2\sqrt{3}\right)+\left(6-\sqrt{3}\right)i}{3}\right\}\\
&=\frac{1}{6}\left\{\left(3+\sqrt{3}\right)+\left(3-\sqrt{3}\right)i-\left(2\sqrt{3}-1\right)+\left(\sqrt{3}-2\right)i\right\}\\
&=\frac{4-\sqrt{3}+i}{6}\text{(C)}
\end{aligned}$$

を得る。最後に①より，

$$\alpha_n=1+i-\beta_n-\gamma_n$$

である。$n\to\infty$の極限をとると，

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\alpha_n&=1+i-\frac{4-\sqrt{3}+i}{6}-\frac{1+\left(4-\sqrt{3}\right)i}{6}\\
&=1+i-\frac{\left(5-\sqrt{3}\right)\left(1+i\right)}{6}\\
&=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+i\right)}{6}\text{(D)}
\end{aligned}$$

を得る。

(答) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+i\right)}{6}$， $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\beta_n=\frac{4-\sqrt{3}+i}{6}$， $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\gamma_n=\frac{1+\left(4-\sqrt{3}\right)i}{6}$

(B) $\lim_{n\to\infty}\gamma_n$ を正しく求めて‥5 点

(C) $\lim_{n\to\infty}\beta_n$ を正しく求めて‥5 点

(D) $\lim_{n\to\infty}\alpha_n$ を正しく求めて‥5 点

(4)[別解]

(①, ②, ③を立式して $\lim_{n\to\infty}\gamma_n$ を求めるまで本解と同じ)(A)(B)

$\lim_{n\to\infty}\gamma_n$ が収束するとき, ①×w−②より $\lim_{n\to\infty}\beta_n$ も収束する。同様に, ①×w^{-1}−②より $\lim_{n\to\infty}\alpha_n$ も収束する。 $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ の収束値を単に α, β, γ と表すと, 操作(P)より,

$$\alpha-\frac{1}{2}(\beta+\alpha)=\frac{w^{-1}}{2}(\gamma-\beta)$$
$$\Leftrightarrow \alpha-\beta=w^{-1}(\gamma-\beta)$$

の関係があるから, $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ を結ぶ図形は正三角形または 1 つの点に収束する。いずれの場合も β, α はそれぞれ重心 $g=\frac{1}{3}(1+i)$ を中心に γ を $\frac{2}{3}\pi, -\frac{2}{3}\pi$ 回転させた点に対応する。よって,

$$(\beta-g)=\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)(\gamma-g)$$
$$=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left\{\frac{-1+\left(2-\sqrt{3}\right)i}{6}\right\}$$
$$=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)-i}{6}$$

$$\therefore \beta=\frac{\left(4-\sqrt{3}\right)+i}{6}$$ (C1)

$$(\alpha-g)=\left\{\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right\}(\gamma-g)$$
$$=-\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left\{\frac{-1+\left(2-\sqrt{3}\right)i}{6}\right\}$$
$$=-\frac{\left(2-2\sqrt{3}\right)+\left(2-2\sqrt{3}\right)i}{12}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)(1+i)}{6}$$

$$\therefore \alpha=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)(1+i)}{6}$$ (D1)

(答) $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)(1+i)}{6}$, $\lim_{n\to\infty}\beta_n=\frac{4-\sqrt{3}+i}{6}$, $\lim_{n\to\infty}\gamma_n=\frac{1+\left(4-\sqrt{3}\right)i}{6}$

(4)[別解]　20 点 (A)(B)(C1)(D1)

(A)(B)本解と共通··10 点

(C1) $\lim_{n\to\infty}\beta_n$ を正しく求めて··5 点

(D1) $\lim_{n\to\infty}\alpha_n$ を正しく求めて··5 点

【解説】<<テーマ>>複素数平面

〔配点の詳細〕

(4) [注 1]

$$\alpha_n+\beta_n+\gamma_n=1+i \quad \cdots ①$$

$$w\alpha_n+w^{-1}\beta_n+2\gamma_n=\frac{1}{2}+\frac{4-\sqrt{3}}{2}i \quad \cdots ②$$

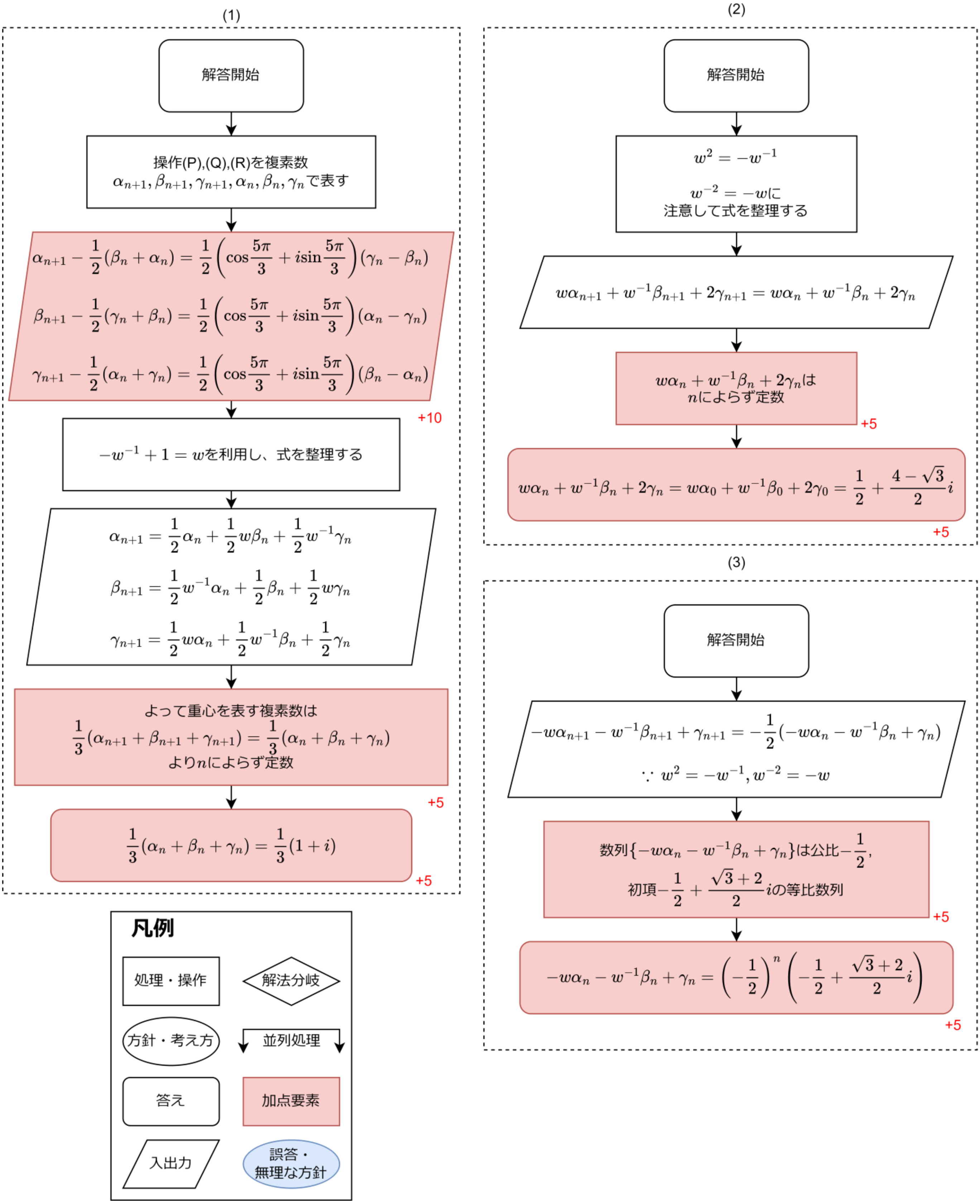
$$-w\alpha_n-w^{-1}\beta_n+\gamma_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}+2}{2}i\right) \quad \cdots ③$$

において，数列$\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}$が収束することを示さずに，収束値$\alpha, \beta, \gamma$を仮定して

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=1+i \\ w\alpha+w^{-1}\beta+2\gamma=\dfrac{1}{2}+\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}i \\ -w\alpha-w^{-1}\beta+\gamma=0\end{cases}$$

といった連立方程式を立てて解く解法は不適切である。導出過程の誤りに該当するが, (4)全体から 5 点減点するにとどめ，以降の極限値の計算などは通常通り採点する。

〔解法フロー〕



(1)
解答開始
操作(P),(Q),(R)を複素数 $\alpha_{n+1},\beta_{n+1},\gamma_{n+1},\alpha_n,\beta_n,\gamma_n$ で表す
$\alpha_{n+1}-\frac{1}{2}(\beta_n+\alpha_n)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)(\gamma_n-\beta_n)$
$\beta_{n+1}-\frac{1}{2}(\gamma_n+\beta_n)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)(\alpha_n-\gamma_n)$
$\gamma_{n+1}-\frac{1}{2}(\alpha_n+\gamma_n)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)(\beta_n-\alpha_n)$
+10
$-w^{-1}+1=w$を利用し、式を整理する
$\alpha_{n+1}=\frac{1}{2}\alpha_n+\frac{1}{2}w\beta_n+\frac{1}{2}w^{-1}\gamma_n$
$\beta_{n+1}=\frac{1}{2}w^{-1}\alpha_n+\frac{1}{2}\beta_n+\frac{1}{2}w\gamma_n$
$\gamma_{n+1}=\frac{1}{2}w\alpha_n+\frac{1}{2}w^{-1}\beta_n+\frac{1}{2}\gamma_n$
よって重心を表す複素数は
$\frac{1}{3}(\alpha_{n+1}+\beta_{n+1}+\gamma_{n+1})=\frac{1}{3}(\alpha_n+\beta_n+\gamma_n)$
よりnによらず定数
+5
$\frac{1}{3}(\alpha_n+\beta_n+\gamma_n)=\frac{1}{3}(1+i)$
+5
(2)
解答開始
$w^2=-w^{-1}$
$w^{-2}=-w$に
注意して式を整理する
$w\alpha_{n+1}+w^{-1}\beta_{n+1}+2\gamma_{n+1}=w\alpha_n+w^{-1}\beta_n+2\gamma_n$
$w\alpha_n+w^{-1}\beta_n+2\gamma_n$は
nによらず定数
+5
$w\alpha_n+w^{-1}\beta_n+2\gamma_n=w\alpha_0+w^{-1}\beta_0+2\gamma_0=\frac{1}{2}+\frac{4-\sqrt{3}}{2}i$
+5
(3)
解答開始
$-w\alpha_{n+1}-w^{-1}\beta_{n+1}+\gamma_{n+1}=-\frac{1}{2}(-w\alpha_n-w^{-1}\beta_n+\gamma_n)$
$\because\ w^2=-w^{-1},w^{-2}=-w$
数列$\{-w\alpha_n-w^{-1}\beta_n+\gamma_n\}$は公比$-\frac{1}{2}$,
初項$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}+2}{2}i$の等比数列
+5
$-w\alpha_n-w^{-1}\beta_n+\gamma_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}+2}{2}i\right)$
+5
凡例
処理・操作
解法分岐
方針・考え方
並列処理
答え
加点要素
入出力
誤答・無理な方針

(4)

解答開始

(1),(2),(3)より

$$\alpha_n+\beta_n+\gamma_n=1+i\cdots①$$

$$w\alpha_n+w^{-1}\beta_n+2\gamma_n=\frac{1}{2}+\frac{4-\sqrt{3}}{2}i\cdots②$$

$$-w\alpha_n-w^{-1}\beta_n+\gamma_n=(-\frac{1}{2})^n(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}+2}{2}i)\cdots③$$

+5

②+③より

$$3\gamma_n=\frac{1}{2}+\frac{4-\sqrt{3}}{2}i+(-\frac{1}{2})^n(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}+2}{2}i)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\gamma_n=\frac{1+(4-\sqrt{3}i)}{6}$$

+5

解法分岐

本解

① × w + ③より

$$(w-w^{-1})\beta_n+(w+1)\gamma_n=(1+i)w+(-\frac{1}{2})^n(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}+2}{2}i)$$

$$\therefore \sqrt{3}i\beta_n=(1+i)(\frac{1+\sqrt{3}i}{2})-(w+1)\gamma_n+(-\frac{1}{2})^n(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}+2}{2}i)$$

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n=\frac{4-\sqrt{3}+i}{6}$$

+5

①より

$$\alpha_n=1+i-\beta_n-\gamma_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\frac{(1+\sqrt{3})(1+i)}{6}$$

+5

別解

$\lim_{n\to\infty}\gamma_n$が収束するとき
① × w − ②, ① × w^{-1} − ②より
$\lim_{n\to\infty}\alpha_n$, $\lim_{n\to\infty}\beta_n$も
収束する

$\alpha_n,\beta_n,\gamma_n$の収束値を$\alpha,\beta,\gamma$と表す

操作(P)より$\alpha-\beta=w^{-1}(\gamma-\beta)$の
関係があるため、
β,αはそれぞれ重心gを中心にγを$-\frac{2}{3}\pi,\frac{2}{3}\pi$
回転させた点となる

$$(\beta-g)=\frac{(2-\sqrt{3})-i}{6}$$

$$(\alpha-g)=\frac{(\sqrt{3}-1)(1+i)}{6}$$

$$\beta=\frac{(4-\sqrt{3})+i}{6}$$

$$\alpha_n=\frac{(1+\sqrt{3})(1+i)}{6}$$

+10(各5点×2)

5 （６０点）

【解答・採点基準】

※特に記載がない限り，導出過程と結論の両方が正しい場合にその配点要素を加点する

関数 $y=x^{\frac{1}{x-k}}$ の定義域が $x>0,\ x\neq k$ より，両辺が正であるから，

両辺の自然対数をとると

$$\log y=\frac{\log x}{x-k}$$

となる。両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y}=\frac{\frac{1}{x}(x-k)-\log x\cdot 1}{(x-k)^2}$$

$$\therefore\ y'=\frac{x^{\frac{1}{x-k}-1}}{(x-k)^2}\{x(1-\log x)-k\}\ \text{(A)}$$

と求まる。ここで，$\dfrac{x^{\frac{1}{x-k}-1}}{(x-k)^2}>0$ より，y' と $x(1-\log x)-k$ の符号が一致する。また，$x(1-\log x)-k=0$ の実数解は，直線 $y=k$ と曲線 $y=x(1-\log x)$ の共有点の x 座標と等しい。(B)このとき，

$f(x)=x(1-\log x)$ とおくと，$f'(x)=-\log x$ より，

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ である。ここで，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)$ について，$x=\dfrac{1}{t}$ と置換すると

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+0}f(x)&=\lim_{x\to+0}x(1-\log x)\\&=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}+\frac{\log t}{t}\right)\\&=0\quad\left(\because \lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t}=0\right)\end{aligned}$$

となる。また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$ に注意すると，$x>0$ における $f(x)$ の増減表は下表となる。

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	(0)	$\nearrow$	1	$\searrow$	$(-\infty)$

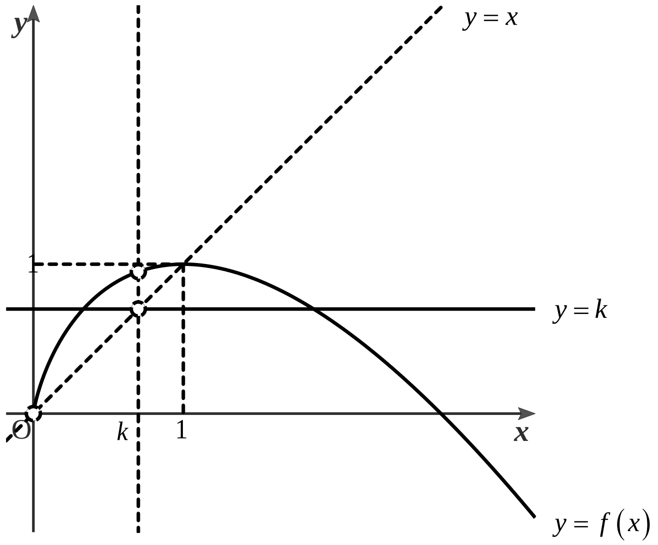
60 点

(A) $y=x^{\frac{1}{x-k}}$ を対数微分する‥5 点

(B) $x(1-\log x)-k=0$ の実数解の個数について k の値で場合分けをする方針‥5 点

・$f(x)=x(1-\log x)-k$ とおいて $y=f(x)$ と $y=0$ の交点を調べる方針も可

また，$y=f(x)$，$y=k$ のグラフは下図となる。



関数 $y=x^{\frac{1}{x-k}}$ の定義域が $x>0,\ x\neq k$ であるから，以下の[1]～[4]で場合分けをする。

[1]　$k>1$

[2]　$k=1$

[3]　$0<k<1$

[4]　$k\leqq 0$

[1]　$k>1$ のとき

$x>0,\ x\neq k$ において $f(x)\leqq 1$ より，$x>0,\ x\neq k$ の任意の x において $f(x)-k<0$ となり，$y'<0$ となる。よって，$y=x^{\frac{1}{x-k}}$ は単調減少する。$\lim_{x\to+0} x^{\frac{1}{x-k}}$ について，$0<x<k$ より，$\dfrac{1}{k-x}>0$ である。$0<x<1$ であるから，

$$\lim_{x\to+0} x^{\frac{1}{x-k}}=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^{\frac{1}{k-x}}}=\infty$$ (C 1/3)

となる。また，$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x-k}}$ について，$x^{\frac{1}{x-k}}=e^{\frac{\log x}{x-k}}$ と変形すると，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x-k}&=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-k}\cdot\frac{\log x}{x}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{k}{x}}\cdot\frac{\log x}{x}\\&=0\end{aligned}$$

であるから，

(C)　[1]の諸極限の計算‥5 点(完答)

・ $\lim_{x\to+0} x^{\frac{1}{x-k}}=\infty$，　$\lim_{x\to k-0} x^{\frac{1}{x-k}}=0$，

$\lim_{x\to k+0} x^{\frac{1}{x-k}}=\infty$ **の完答**

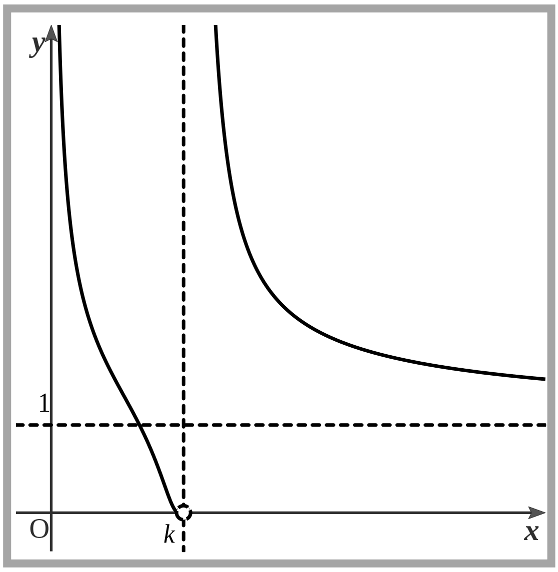
$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x-k}}=1$ (D)

となる。さらに，

$\lim_{x\to k-0} x^{\frac{1}{x-k}}=0\ (\because 1<x<k)$ (C 2/3)

$\lim_{x\to k+0} x^{\frac{1}{x-k}}=\infty\ (\because 1<k<x)$ (C 3/3)

である。よって，$y=x^{\frac{1}{x-k}}$ を図示すると下図の実線となる。



(E)

[2]　$k=1$ のとき

$x>0,\ x\neq 1$ において $f(x)<1$ より，$x>0,\ x\neq 1$ の任意の x において $f(x)-1<0$ となり，$y'<0$ となる。よって，$y=x^{\frac{1}{x-1}}$ は単調減少する。ここで，$x-1=t$ とおくと，

$\lim_{x\to 1\pm 0} x^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{t\to\pm 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$ (F 1/2)

である。また，[1]より

$\lim_{x\to+0} x^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to+0}\dfrac{1}{x^{\frac{1}{1-x}}}=\infty$ (F 2/2)

$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x-1}}=1$ (D)

である。よって，$y=x^{\frac{1}{x-k}}$ を図示すると下図の実線部分となる。

(D)　$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x-k}}=1$ **‥5 点**

・解答用紙に計算がなされていれば可

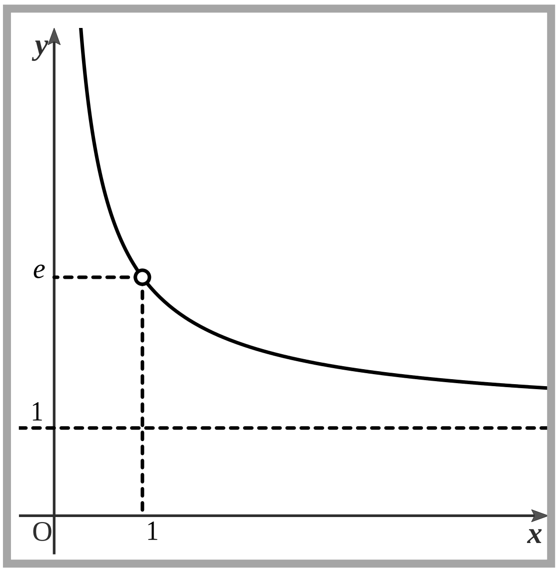
・[1]～[4]すべてに $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x-k}}=1$ を記載していなくても可

(E)[1]のグラフ‥5 点

・端点の極限が分かるように描いてあれば可（$\lim_{x\to+0} x^{\frac{1}{x-k}}=\infty$，$\lim_{x\to k-0} x^{\frac{1}{x-k}}=0$，$\lim_{x\to k+0} x^{\frac{1}{x-k}}=\infty$，$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x-k}}=1$）

(F)[2]の諸極限の計算‥5 点（完答）

- $\lim_{x\to+0} x^{\frac{1}{x-1}}=\infty$，$\lim_{x\to 1\pm 0} x^{\frac{1}{x-1}}=e$ **の完答**
- $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x-1}}=1$ **は(D)での配点**



(G)

[3] $0<k<1$ のとき

$f(x)=k$ の相異なる実数解を $x=\alpha,\beta\ (0<\alpha<1<\beta)$ とする。

このとき，$k=\alpha(1-\log\alpha)$ より，

$$\begin{aligned} k-\alpha &= \alpha(1-\log\alpha)-\alpha \\ &= -\alpha\log\alpha \\ &> 0\ (\because \alpha<1) \end{aligned}$$

となるため，$k>\alpha$ である。同様にして $k<\beta$ である。(H)また，

$$\begin{aligned} \alpha^{\frac{1}{\alpha-k}} &= \alpha^{\frac{1}{\alpha\log\alpha}}\ \left(\because k=\alpha(1-\log\alpha)\right) \\ &= e^{\frac{\log\alpha}{\alpha\log\alpha}} \\ &= e^{\frac{1}{\alpha}} \end{aligned}$$

と表せる。同様に $\beta^{\frac{1}{\beta-k}}=e^{\frac{1}{\beta}}$ である。[1]の過程より

$$\lim_{x\to+0} x^{\frac{1}{x-k}}=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^{\frac{1}{k-x}}}=\infty$$ (I 1/3)

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x-k}}=1$$ (D)

である。さらに，

$$\lim_{x\to k-0} x^{\frac{1}{x-k}}=\infty\ (\because x<k<1)$$ (I 2/3)

$$\lim_{x\to k+0} x^{\frac{1}{x-k}}=0\ (\because k<x<1)$$ (I 3/3)

である。よって，増減表は下表となる。

(G)[2]のグラフ‥5 点

・端点の極限が分かるように描いてあれば可（$\lim_{x\to+0} x^{\frac{1}{x-1}}=\infty$，$\lim_{x\to1\pm0} x^{\frac{1}{x-1}}=e$，$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x-1}}=1$**）**

(H) $\alpha<k<\beta$ **を示す‥5 点**

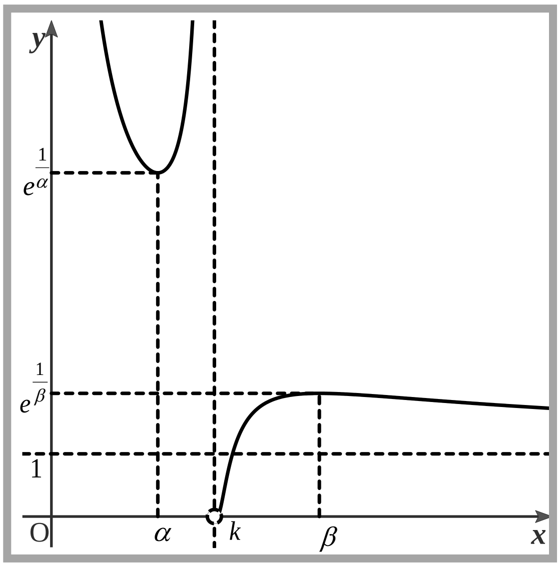
・$k<\beta$ **ついては自明であるため，増減表で** $k<\beta$ **が読み取れれば可**

(I)[3]の諸極限の計算‥5 点(完答)

- $\lim_{x\to+0} x^{\frac{1}{x-k}}=\infty$，$\lim_{x\to k-0} x^{\frac{1}{x-k}}=\infty$，$\lim_{x\to k+0} x^{\frac{1}{x-k}}=0$ **の完答**
- $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x-k}}=1$ **は(D)での配点**

x	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	(k)	$\cdots$	β	$\cdots$	(∞)
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	(∞)	$\searrow$	$e^{\frac{1}{\alpha}}$	$\nearrow$		$\nearrow$	$e^{\frac{1}{\beta}}$	$\searrow$	(1)

したがって，$y=x^{\frac{1}{x-k}}$ を図示すると下図となる。



(J)

[4] $k\leqq 0$ のとき

$f(x)=k$ の実数解を $x=\gamma\ (1<\gamma)$ とする。このとき, [3]と同様にして $\gamma^{\frac{1}{\gamma-k}}=e^{\frac{1}{\gamma}}$ である。 $\lim_{x\to+0} x^{\frac{1}{x-k}}$ について，$x-k>0$ より，$\frac{1}{x-k}>0$ である。 $0<x<1$ であるから，

$\lim_{x\to+0} x^{\frac{1}{x-k}}=0$ (K)

となる。また，[1]より $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x-k}}=1$ (D)である。このとき，増減表は下表となる。

x	(0)	$\cdots$	γ	$\cdots$	(∞)
y'		$+$	0	$-$	
y	(0)	$\nearrow$	$e^{\frac{1}{\gamma}}$	$\searrow$	(1)

よって，$y=x^{\frac{1}{x-k}}$ を図示すると下図となる。

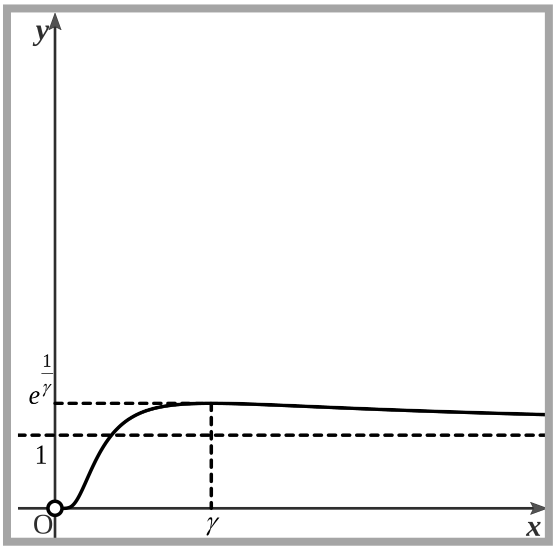
(J)[3]のグラフ‥5 点

・端点の極限が分かるように描いてあれば可（$\lim_{x\to+0} x^{\frac{1}{x-k}}=\infty$， $\lim_{x\to k-0} x^{\frac{1}{x-k}}=\infty$，

$\lim_{x\to k+0} x^{\frac{1}{x-k}}=0$， $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x-k}}=1$）

(K) $\lim_{x\to+0} x^{\frac{1}{x-k}}=0$‥5 点

・$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x-k}}=1$ は(D)での配点



(L)

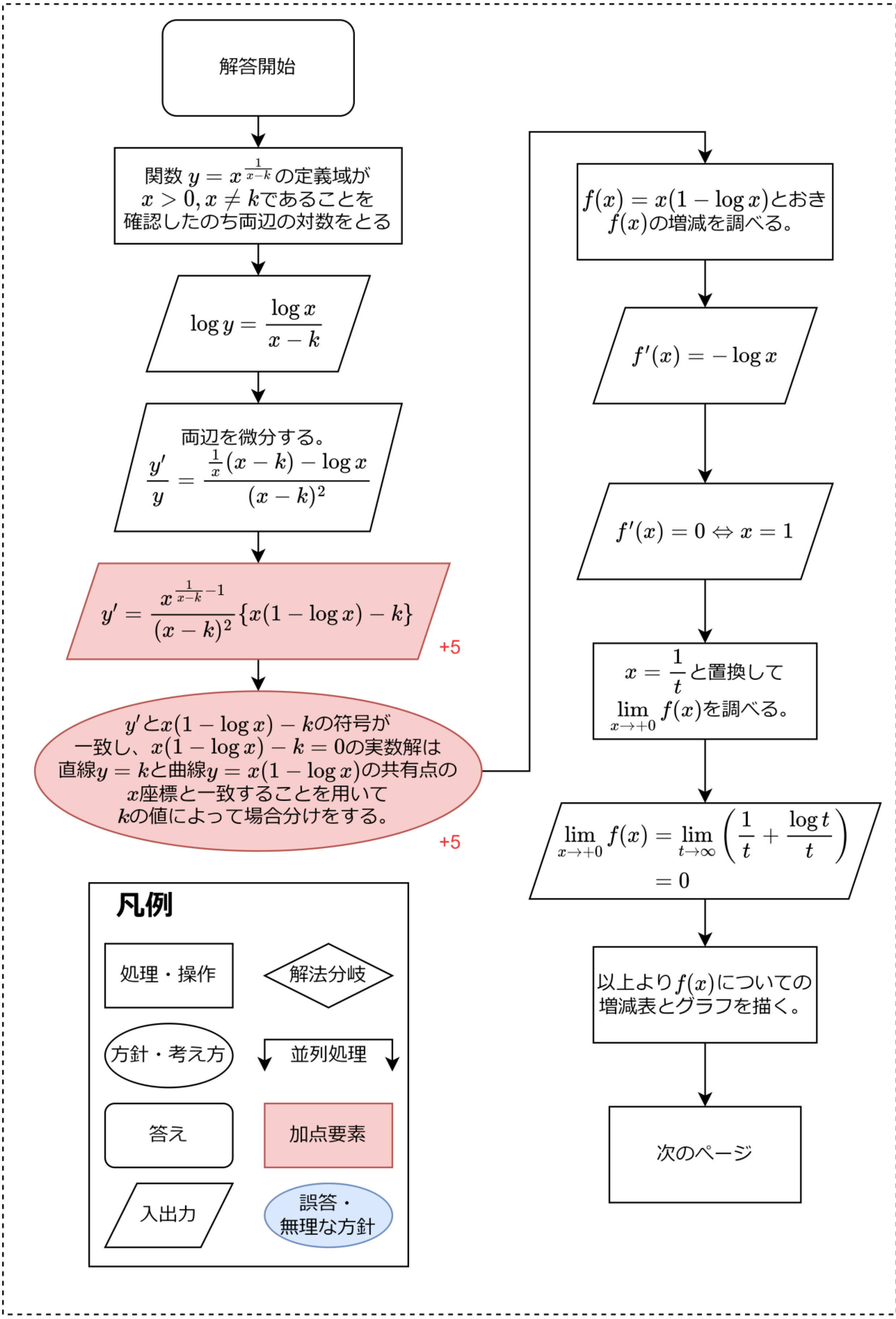
(答) [1]~[4]の図の通り

(L)[4]のグラフ‥5点

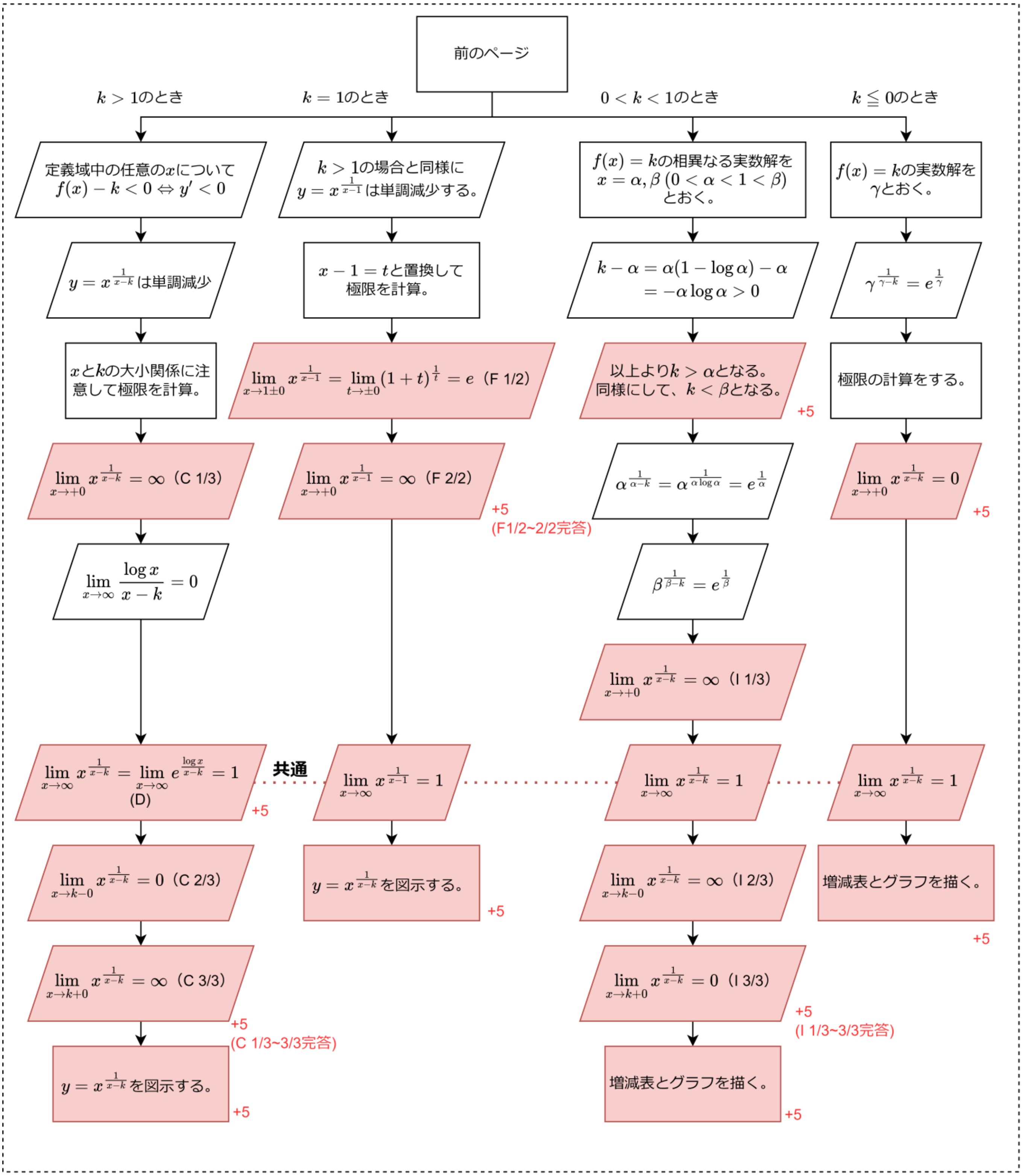
・端点の極限が分かるように描いてあれば可（$\lim_{x\to+0} x^{\frac{1}{x-k}}=0$，$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x-k}}=1$）

【解説】<<テーマ>>対数微分、極限

〔解法フロー〕



解答開始
関数 $y=x^{\frac{1}{x-k}}$ の定義域が $x>0, x\neq k$ であることを確認したのち両辺の対数をとる
$\log y=\dfrac{\log x}{x-k}$
両辺を微分する。
$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{\frac{1}{x}(x-k)-\log x}{(x-k)^2}$
$y'=\dfrac{x^{\frac{1}{x-k}-1}}{(x-k)^2}\{x(1-\log x)-k\}$
+5
y' と $x(1-\log x)-k$ の符号が一致し、$x(1-\log x)-k=0$ の実数解は直線 $y=k$ と曲線 $y=x(1-\log x)$ の共有点の x 座標と一致することを用いて k の値によって場合分けをする。
+5
$f(x)=x(1-\log x)$ とおき $f(x)$ の増減を調べる。
$f'(x)=-\log x$
$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$
$x=\dfrac{1}{t}$ と置換して $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)$ を調べる。
$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}+\frac{\log t}{t}\right)=0$
以上より $f(x)$ についての増減表とグラフを描く。
次のページ
凡例
処理・操作
解法分岐
方針・考え方
並列処理
答え
加点要素
入出力
誤答・無理な方針


前のページ
$k>1$のとき
$k=1$のとき
$0<k<1$のとき
$k \leqq 0$のとき
定義域中の任意のxについて $f(x)-k<0 \Leftrightarrow y'<0$
$y=x^{\frac{1}{x-k}}$は単調減少
xとkの大小関係に注意して極限を計算。
$\lim_{x\to+0} x^{\frac{1}{x-k}}=\infty$（C 1/3）
$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x-k}=0$
$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x-k}}=\lim_{x\to\infty} e^{\frac{\log x}{x-k}}=1$ (D)
+5
共通
$\lim_{x\to k-0} x^{\frac{1}{x-k}}=0$（C 2/3）
$\lim_{x\to k+0} x^{\frac{1}{x-k}}=\infty$（C 3/3）
+5
(C 1/3~3/3完答)
$y=x^{\frac{1}{x-k}}$を図示する。
+5
$k>1$場合と同様に $y=x^{\frac{1}{x-1}}$は単調減少する。
$x-1=t$と置換して極限を計算。
$\lim_{x\to1\pm0} x^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{t\to\pm0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$（F 1/2）
$\lim_{x\to+0} x^{\frac{1}{x-1}}=\infty$（F 2/2）
+5
(F1/2~2/2完答)
$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x-1}}=1$
$y=x^{\frac{1}{x-k}}$を図示する。
+5
$f(x)=k$の相異なる実数解を $x=\alpha,\beta\ (0<\alpha<1<\beta)$ とおく。
$k-\alpha=\alpha(1-\log\alpha)-\alpha$ $=-\alpha\log\alpha>0$
以上より$k>\alpha$となる。同様にして、$k<\beta$となる。
+5
$\alpha^{\frac{1}{\alpha-k}}=\alpha^{\frac{1}{\alpha\log\alpha}}=e^{\frac{1}{\alpha}}$
$\beta^{\frac{1}{\beta-k}}=e^{\frac{1}{\beta}}$
$\lim_{x\to+0} x^{\frac{1}{x-k}}=\infty$（I 1/3）
$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x-k}}=1$
$\lim_{x\to k-0} x^{\frac{1}{x-k}}=\infty$（I 2/3）
$\lim_{x\to k+0} x^{\frac{1}{x-k}}=0$（I 3/3）
+5
(I 1/3~3/3完答)
増減表とグラフを描く。
+5
$f(x)=k$の実数解をγとおく。
$\gamma^{\frac{1}{\gamma-k}}=e^{\frac{1}{\gamma}}$
極限の計算をする。
$\lim_{x\to+0} x^{\frac{1}{x-k}}=0$
+5
$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x-k}}=1$
増減表とグラフを描く。
+5