２０２３年　第１回東工大本番レベル模試・物理

解答・採点基準

全３問　１２０分　５０点満点

$\boxed{\text{I}}$ （５０点）

【解答・採点基準】

[A]

(a)

地表($x=\pm R$)において小物体 1 が受ける万有引力を考えることで

$$mg=\frac{GMm}{R^2}$$
$$\therefore g=\frac{GM}{R^2}$$

（答） $g=\dfrac{GM}{R^2}$

(b)

質点 P の質量を M' とすると

$$M'=\frac{|x|^3}{R^3}M$$

よって F は

$$F=-\frac{x}{|x|}\cdot\frac{GM'm}{x^2}$$
$$=-\frac{mgx}{R}\left(\because g=\frac{GM}{R^2}\right)$$

（答） $F=-\dfrac{mgx}{R}$

(c)

小物体 1 の加速度を a とすると，小物体 1 の運動方程式より

[A] 22 点

(a) 5 点

＊ $x=\pm R$ での万有引力の立式に 2 点

＊答に 3 点

(b) 5 点

＊ M' を求めて 2 点

＊ F の立式に 1 点

＊答に 2 点

(c) 6 点

＊運動方程式の立式に 2 点

＊求める値が単振動

$$ma = -\frac{mgx}{R}$$ $$\therefore a = -\frac{g}{R}x$$ よって小物体 1 は角振動数 $\sqrt{\frac{g}{R}}$ の単振動をし，求める時間 T はこの単振動の半周期であるから $$T = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$ （答） $T = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}$	の半周期であることに 2 点 ＊T の立式に 1 点 ＊答に 1 点
(d) (b)の結果より，小物体 1 はトンネル内においてばね定数 $\frac{mg}{R}$，原点 O において自然長のばねから弾性力を受けているとみなすことができる。よって $$U = \frac{1}{2}\cdot\frac{mg}{R}\cdot x^2$$ $$= \frac{mg}{2R}x^2$$ （答） $U = \frac{mg}{2R}x^2$	(d) 6 点 ＊ばねから弾性力を受けているとみなす考え方に 2 点 ＊U の立式に 3 点 ＊答に 1 点
[B] (e) 無限遠方を位置エネルギーの基準として，力学的エネルギー保存則より $$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{x_0}$$ $$\therefore v_1 = \sqrt{2gR\frac{x_0 - R}{x_0}} \quad \left(\because g = \frac{GM}{R^2}\right)$$ また(d)の結果より，原点 O を位置エネルギーの基準として，単振動のエネルギー保存則より	[B] 28 点 (e) 8 点 ＊エネルギー保存則の立式に各 3 点×2 ＊答に各 1 点×2

$$\frac{1}{2}mv_2{}^2 = \frac{1}{2}mv_1{}^2 + \frac{mg}{2R}R^2$$

$$\therefore v_2 = \sqrt{gR\frac{3x_0 - 2R}{x_0}} \quad \left(\because v_1 = \sqrt{2gR\frac{x_0 - R}{x_0}}\right)$$

(答) $\therefore v_1 = \sqrt{2gR\frac{x_0 - R}{x_0}}$, $v_2 = \sqrt{gR\frac{3x_0 - 2R}{x_0}}$

(f) 9点(各3点×3)

＊ G, M を消去せず ※の形で解答している場合は各 2 点のみ加点する。

(f)

(あ) $v_2\sqrt{\frac{R}{g}}$ ※ $v_2\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$

(い) $\frac{\sqrt{gR}}{v_2}$ ※ $\frac{1}{v_2}\sqrt{\frac{GM}{R}}$

(う) $2\theta\sqrt{\frac{R}{g}}$ ※ $2\theta\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$

(g) 5点

＊ $\sin\theta = \sqrt{\frac{x_0}{3x_0 - 2R}}$ に 2 点

＊ $\theta \fallingdotseq \frac{35}{180}\pi$ の近似に 2 点

＊答に 1 点

(g)

(e)より $v_2 = \sqrt{gR\frac{3x_0 - 2R}{x_0}}$ なので, (f)(い)の結果に代入して

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{x_0}{3x_0 - 2R}}$$

$$\fallingdotseq \sqrt{\frac{1}{3}} \quad \left(\because \frac{R}{x_0} \to 0\right)$$

$$\fallingdotseq 0.58$$

表 1 より $\sin 35^\circ \fallingdotseq 0.57$ なので

$$\theta \fallingdotseq \frac{35}{180}\pi$$

と近似でき, (f)(う)の結果に代入して

$$\tau \fallingdotseq 2\cdot\frac{35}{180}\pi\cdot\sqrt{\frac{6.4\times10^6\ [\mathrm{m}]}{1.0\times10\ [\mathrm{m/s^2}]}}$$

$$\fallingdotseq 9.8\times10^2\ [\mathrm{s}]$$

よって選択肢の中では②が最も適切である。

(答) ②

(h) 6点(各3点×2)

(h)

(1) (キ)

(2) (エ)

2 （５０点）

【解答・採点基準】

[A]

(a)

(ア) $\dfrac{\varepsilon_0 S}{3d}$

(イ) $\dfrac{\varepsilon_0 S V_0}{3d}$

(ウ) $\dfrac{\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0 S}{(\varepsilon_{\mathrm{r}}+2)d}$

(b)

十分時間が経過したときの，コンデンサーＣの上側極板に蓄えられている電気量を q_{C} とする。電気量の保存則より $q_{\mathrm{A}}+q_{\mathrm{C}}=Q$ であり，また極板 $\mathrm{A_1}$ とコンデンサーＣの上側極板の電位は等しいから，

$$\frac{q_{\mathrm{A}}}{C'}=\frac{q_{\mathrm{C}}}{C}$$

$$\therefore q_{\mathrm{C}}=\frac{C}{C'}q_{\mathrm{A}}=\frac{\varepsilon_{\mathrm{r}}+2}{3\varepsilon_{\mathrm{r}}}q_{\mathrm{A}}$$

となる。よって，

$$q_{\mathrm{A}}+\frac{\varepsilon_{\mathrm{r}}+2}{3\varepsilon_{\mathrm{r}}}q_{\mathrm{A}}=Q$$

$$\therefore q_{\mathrm{A}}=\frac{3\varepsilon_{\mathrm{r}}}{4\varepsilon_{\mathrm{r}}+2}Q$$

となる。

(答) $\dfrac{3\varepsilon_{\mathrm{r}}}{4\varepsilon_{\mathrm{r}}+2}Q$

[B]

(c)

このときのコンデンサーA の電気容量を C_2 とすると，真空部分の幅は $3d-(d+x)=2d-x$ であるから，

[A] 15 点

(a) 9 点(3 点×3)

(b) 6 点

*電気量の保存則の立式に 2 点

*コンデンサーA,C の等電位の立式に 2 点

*答に 2 点

[B] 16 点

(c) 6 点

*電気容量(の逆数)の立式に 2 点

*静電エネルギーの立式に 2 点

$$\frac{1}{C_2}=\frac{1}{\dfrac{\varepsilon_0 S}{2d-x}}+\frac{1}{\dfrac{\varepsilon_r\varepsilon_0 S}{d+x}}$$
$$=\frac{\varepsilon_r(2d-x)+(d+x)}{\varepsilon_r\varepsilon_0 S}$$
$$=\frac{(2\varepsilon_r+1)d+(1-\varepsilon_r)x}{\varepsilon_r\varepsilon_0 S}$$

となる。よって，コンデンサーAに蓄えられている電気量はQであるから，

$$U_1(x)=\frac{Q^2}{2C_2}=\frac{(2\varepsilon_r+1)d+(1-\varepsilon_r)x}{2\varepsilon_r\varepsilon_0 S}Q^2$$

となる。

(答) $\dfrac{(2\varepsilon_r+1)d+(1-\varepsilon_r)x}{2\varepsilon_r\varepsilon_0 S}Q^2$

*答に 2 点

(c)〔別解〕

(c)［別解］6 点

***電場の強さ E_1, E_2 に 2 点**

***静電エネルギーの立式に 2 点**

***答に 2 点**

コンデンサーAの真空部分の電場の強さは$E_1=\dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}$であり，液体部分の電場の強さは$E_2=\dfrac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r S}$である。また，コンデンサーAの真空部分の幅は$3d-(d+x)=2d-x$であるから，コンデンサーAの真空部分の体積は$(2d-x)S$であり，液体部分の体積は$(d+x)S$である。したがって，

$$U_1(x)=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_1^{\,2}(2d-x)S+\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E_2^{\,2}(d+x)S$$
$$=\frac{(2d-x)\varepsilon_r+(d+x)}{2\varepsilon_r\varepsilon_0 S}Q^2$$
$$=\frac{(2\varepsilon_r+1)d+(1-\varepsilon_r)x}{2\varepsilon_r\varepsilon_0 S}Q^2$$

となる。

(答) $\dfrac{(2\varepsilon_r+1)d+(1-\varepsilon_r)x}{2\varepsilon_r\varepsilon_0 S}Q^2$

(d)

(d) 6 点

***部屋 A, B の液体の質量に 1 点**

***部屋 A, B の液体の重**

部屋Aの液体の質量は$\rho S(d+x)$であり，重心の高さは$\dfrac{d+x}{2}$であるから，位置エネルギーは

$$\rho S(d+x)g\cdot\frac{d+x}{2}=\frac{\rho Sg\left(d^2+2dx+x^2\right)}{2}$$ である。また，部屋 B の液体の質量は $\rho S(d-x)$ であり，重心の高さは $\dfrac{d-x}{2}$ であるから，位置エネルギーは $$\rho S(d-x)g\cdot\frac{d-x}{2}=\frac{\rho Sg\left(d^2-2dx+x^2\right)}{2}$$ である。したがって，液体全体の位置エネルギーは $$U_2(x)=\frac{\rho Sg\left(d^2+2dx+x^2\right)}{2}+\frac{\rho Sg\left(d^2-2dx+x^2\right)}{2}$$ $$=\rho Sg\left(d^2+x^2\right)$$ である。 (答) $\rho Sg\left(d^2+x^2\right)$	心の高さに 1 点 *部屋 A, B の液体の位置エネルギーに 2 点 *答に 2 点
(d)〔別解〕 部屋 A, B の液体の質量はそれぞれ $\rho S(d+x)$, $\rho S(d-x)$ であり，その合計は $$\rho S(d+x)+\rho S(d-x)=2\rho Sd$$ である。また，部屋 A, B の液体全体の重心の高さは $$\frac{\rho S(d+x)\cdot\frac{d+x}{2}+\rho S(d-x)\cdot\frac{d-x}{2}}{2\rho Sd}=\frac{d^2+x^2}{2d}$$ であるから，液体全体の位置エネルギーは $$U_2(x)=2\rho Sdg\cdot\frac{d^2+x^2}{2d}$$ $$=\rho Sg\left(d^2+x^2\right)$$ である。 (答) $\rho Sg\left(d^2+x^2\right)$	(d)［別解］ 6 点 *部屋 A, B の液体の質量の合計に 1 点 *部屋 A, B の液体全体の重心の高さに 3 点 *答に 2 点
(e) $$U_1(x)+U_2(x)$$ $$=\frac{(2\varepsilon_r+1)d+(1-\varepsilon_r)x}{2\varepsilon_r\varepsilon_0 S}Q^2+\rho Sg\left(d^2+x^2\right)$$ $$=\rho Sg\left\{x-\frac{Q^2(\varepsilon_r-1)}{4\varepsilon_r\varepsilon_0\rho S^2 g}\right\}^2+(x\text{によらない定数})$$	(e) 4 点 *平方完成した結果に 2 点 *答に 2 点

より，$U_1(x)+U_2(x)$ が最小となるのは，$x=\dfrac{Q^2(\varepsilon_{\rm r}-1)}{4\varepsilon_{\rm r}\varepsilon_0\rho S^2 g}$ のとき

である。

(答) $\dfrac{Q^2(\varepsilon_{\rm r}-1)}{4\varepsilon_{\rm r}\varepsilon_0\rho S^2 g}$

(e)〔別解〕

(e)[別解] 4点
***微分した結果に2点**
***答に2点**

$f(x)=U_1(x)+U_2(x)$ を微分すると，

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=U_1'(x)+U_2'(x)\\
&=\frac{1-\varepsilon_{\rm r}}{2\varepsilon_{\rm r}\varepsilon_0 S}Q^2+2\rho Sgx\\
&=2\rho Sg\left(x-\frac{Q^2(\varepsilon_{\rm r}-1)}{4\varepsilon_{\rm r}\varepsilon_0\rho S^2 g}\right)
\end{aligned}
$$

となるから，$f(x)=U_1(x)+U_2(x)$ は $x<\dfrac{Q^2(\varepsilon_{\rm r}-1)}{4\varepsilon_{\rm r}\varepsilon_0\rho S^2 g}$ で単調減少し，$x>\dfrac{Q^2(\varepsilon_{\rm r}-1)}{4\varepsilon_{\rm r}\varepsilon_0\rho S^2 g}$ で単調増加する。よって，$U_1(x)+U_2(x)$ が最小となるのは，$x=\dfrac{Q^2(\varepsilon_{\rm r}-1)}{4\varepsilon_{\rm r}\varepsilon_0\rho S^2 g}$ のときである。

(答) $\dfrac{Q^2(\varepsilon_{\rm r}-1)}{4\varepsilon_{\rm r}\varepsilon_0\rho S^2 g}$

[C]

[C] 19点

(f)

(f) 7点
***極板 A_1 の電位に2点**
***電流の立式に2点**
***答に3点**

スイッチ S_1 を閉じた直後の，コンデンサーAの電気容量は C_2 であり，蓄えられている電気量は Q であるから，極板 A_1 の電位 V は

$$
\begin{aligned}
V&=\frac{Q}{C_2}\\
&=\frac{\varepsilon_0 SV_0}{3d}\cdot\frac{(2\varepsilon_{\rm r}+1)d+(1-\varepsilon_{\rm r})x}{\varepsilon_{\rm r}\varepsilon_0 S}\\
&=\left(\frac{2\varepsilon_{\rm r}+1}{3\varepsilon_{\rm r}}+\frac{(1-\varepsilon_{\rm r})x}{3\varepsilon_{\rm r}d}\right)V_0
\end{aligned}
$$

である。よって，

$$
V_0-V=\frac{(\varepsilon_{\rm r}-1)(d+x)}{3\varepsilon_{\rm r}d}V_0\ (>0)
$$

より，求める電流の大きさはキルヒホッフの第 2 法則より，

$$I=\frac{V_0-V}{R}=\frac{(\varepsilon_r-1)(d+x)V_0}{3\varepsilon_r dR}$$

である。

(答) $\dfrac{(\varepsilon_r-1)(d+x)V_0}{3\varepsilon_r dR}$

(g)

時刻 $t=t_0$ において，極板 A_1 に蓄えられている電気量を Q_1 とすると，コンデンサーA の電気容量は C_2 で一定であるから $Q_1=C_2V_0$ である。また，直流電源のする仕事は $(Q_1-Q)V_0$ であり，スイッチ S_1 を閉じた直後から時刻 $t=t_0$ までの間にコンデンサーA の静電エネルギーは $\dfrac{Q^2}{2C_2}$ から $E_2=\dfrac{1}{2}C_2V_0^2$ に変化するから，エネルギー保存則より，

$$\begin{aligned}E_1&=(Q_1-Q)V_0-\left(\frac{1}{2}C_2V_0^2-\frac{Q^2}{2C_2}\right)\\&=(C_2V_0-CV_0)V_0-\left(\frac{1}{2}C_2V_0^2-\frac{C^2V_0^2}{2C_2}\right)\ (\because Q=CV_0)\\&=\frac{1}{2}C_2V_0^2\left(1-2\frac{C}{C_2}+\frac{C^2}{C_2^2}\right)\\&=E_2\left(1-\frac{C}{C_2}\right)^2\end{aligned}$$

となる。よって，

$$\begin{aligned}\frac{E_1}{E_2}&=\left(1-\frac{C}{C_2}\right)^2\\&=\left[1-\left\{\frac{2\varepsilon_r+1}{3\varepsilon_r}+\frac{(1-\varepsilon_r)x}{3\varepsilon_r d}\right\}\right]^2\\&=\frac{(\varepsilon_r-1)^2(d+x)^2}{9\varepsilon_r^2d^2}\end{aligned}$$

である。

(答) $\dfrac{(\varepsilon_r-1)^2(d+x)^2}{9\varepsilon_r^2d^2}$

(h)

(g) 7 点

＊直流電源のする仕事に 1 点

＊静電エネルギーの変化に 1 点

＊エネルギー保存則の立式に 2 点

＊答に 3 点

(h) 5 点

＊U_3 が単調増加に 2 点

部屋Aにおける液面の高さが$d+y$のときの，コンデンサーAの電気容量をC_3とする。(c)より$\dfrac{1}{C_3}=\dfrac{(2\varepsilon_\mathrm{r}+1)d-(\varepsilon_\mathrm{r}-1)y}{\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0 S}$であるから，$y$が大きいほど$C_3$も大きくなり，コンデンサーAの静電エネルギー$U_3(y)=\dfrac{1}{2}C_3V_0^{\,2}$も大きくなる。よって，常に$U_3(y)$は単調増加である。また，(d)より$y>0$のとき$U_2(y)$は単調増加であるから，$y>0$のとき$U_3(y)+U_2(y)$も単調増加となり，$y>0$の範囲で$U_3(y)+U_2(y)$は最小とならない。したがって，①と③は不適である。

(答) ②

*y>0 のとき U_2 が単調増加に 1 点

*答に 2 点

3 （５０点）

【解答・採点基準】

[A]

[A] 9 点

(a)

(a) 9 点(3 点×3)

(ア)	0
(イ)	$2L$
(ウ)	$2L = k\dfrac{c}{f}$

((ア), (イ)に関しては $\dfrac{c}{f}$ の整数倍の式が足されていても正解とする。)

[B]

[B] 41 点

(b)

(b) 7 点

＊固定端での合成波の変位が 0 であることを立式できて 4 点

＊答に 3 点（同位相の式でも可）

反射波 2 の進行方向は y 軸の負方向であるから，定数 γ を用いて

$$F_2(x,\ y,\ t) = -A\sin\left\{2\pi f\left(t + \frac{y-\gamma}{c}\right)\right\}$$

辺 R での固定端反射より，$y = x$ のときに，正弦波 1 と反射波 2 の合成波の変位が 0 であるから，

$$F_1(x,\ x,\ t) + F_2(x,\ x,\ t) = 0$$

$$\Leftrightarrow A\sin\left\{2\pi f\left(t + \frac{x}{c}\right)\right\} - A\sin\left\{2\pi f\left(t + \frac{x-\gamma}{c}\right)\right\} = 0$$

特に $\gamma = 0$ のとき，任意の $x,\ t$ で上式が成立するから

$$F_2(x,\ y,\ t) = -A\sin\left\{2\pi f\left(t + \frac{y}{c}\right)\right\}$$

(答) $-A\sin\left\{2\pi f\left(t + \dfrac{y}{c}\right)\right\}$

(c)

(c) 7 点

＊対称性を用いる方針に 4 点

＊答に 3 点（同位相

(b)の結果に対して x 軸における対称性を用いると

$$F_3(x,\ y,\ t) = -A\sin\left\{2\pi f\left(t - \frac{y}{c}\right)\right\}$$

（答） $-A\sin\left\{2\pi f\left(t-\frac{y}{c}\right)\right\}$	の式でも可）
(d) まず，反射波 3 の辺 R での反射を考える。このとき反射波 4 の進行方向は x 軸の正方向であるから，定数 δ を用いて $F_4(x,\ y,\ t)=A\sin\left\{2\pi f\left(t-\frac{x-\delta}{c}\right)\right\}\ (0\leqq y\leqq a)$ 辺 R での固定端反射より，$y=x$ のときに，反射波 3 と反射波 4 の合成波の変位が 0 であるから，$0\leqq y<a$ において $F_3(x,\ x,\ t)+F_4(x,\ x,\ t)=0$ $\Leftrightarrow -A\sin\left\{2\pi f\left(t-\frac{x}{c}\right)\right\}+A\sin\left\{2\pi f\left(t-\frac{x-\delta}{c}\right)\right\}=0$ 特に $\delta=0$ のとき，任意の $x,\ t$ で上式が成立するから $F_4(x,\ y,\ t)=A\sin\left\{2\pi f\left(t-\frac{x}{c}\right)\right\}\ (0\leqq y\leqq a)$ さらに，x 軸における対称性より反射波 2 の辺 S での反射でも同じ式が得られるから $F_4(x,\ y,\ t)=A\sin\left\{2\pi f\left(t-\frac{x}{c}\right)\right\}$ （答） $A\sin\left\{2\pi f\left(t-\frac{x}{c}\right)\right\}$	(d) 8 点 ＊固定端での合成波の変位が 0 であることを立式できて 3 点 ＊対称性を用いる方針に 3 点 ＊答に 2 点（同位相の式でも可）
(e) (b), (c)と同様にして $\begin{cases} F_5(x,\ y,\ t)=-A\sin\left\{2\pi f\left(t+\frac{y-2a}{c}\right)\right\} \\ F_6(x,\ y,\ t)=-A\sin\left\{2\pi f\left(t-\frac{y+2a}{c}\right)\right\} \end{cases}$ したがって，反射波 7 の波の式は(d)と同様にして $A\sin\left\{2\pi f\left(t+\frac{x-4a}{c}\right)\right\}$ これが $F_1(x,\ y,\ t)$ と同位相になる条件は $4a=l\frac{c}{f}$	(e) 7 点 ＊ $F_5(x,\ y,\ t)$ もしくは $F_6(x,\ y,\ t)$ の式に 2 点（片方のみでも可） ＊反射波 7 の式に 2 点 ＊答に 3 点

$$\therefore\ f=\frac{lc}{4a}$$

(答) $\dfrac{lc}{4a}$

(e)〔別解〕

ゴム膜上の任意の点での正弦波 1 は 4 回の反射を経て，$4a$ だけ進んだのちに元の点へと戻る。戻ったときに最初の正弦波 1 と同位相であればよい。さらに，縁では固定端反射をすることから位相が π だけずれるが，反射は 4 回起きるので最終的に固定端反射による位相のずれはなくなる。したがって，求める条件は

$$4a=l\frac{c}{f}$$

$$\therefore\ f=\frac{lc}{4a}$$

(答) $\dfrac{lc}{4a}$

(e)［別解］7 点

＊4 回の反射を経て元の点に戻るということに言及できて 2 点

＊固定端反射では位相が π だけずれることに言及できて 2 点

＊答えに 3 点

(f)

(エ) $\dfrac{m\pi ct}{a}$

(オ) $\dfrac{m\pi}{2a}(x+y)$

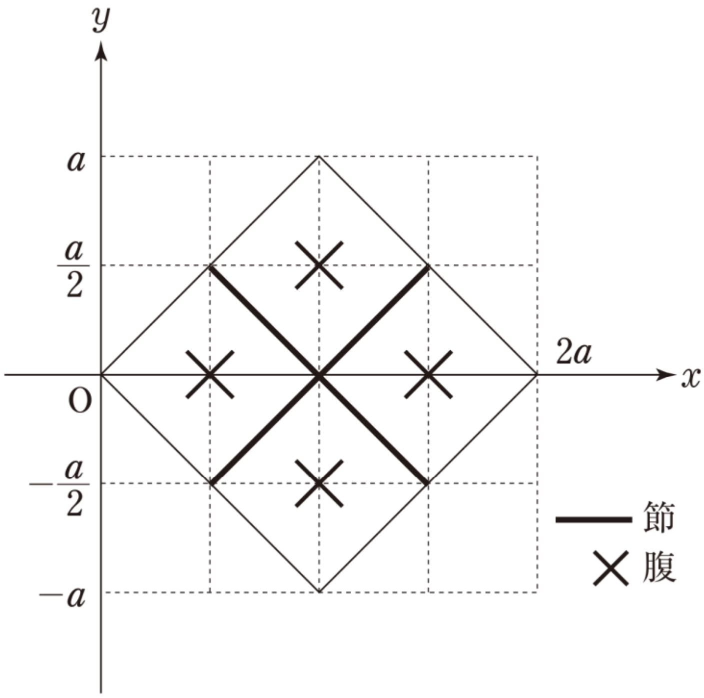
(カ) $\dfrac{m\pi}{2a}(x-y)$

((エ), (オ), (カ)は順不同，また，(エ), (オ), (カ)のうち 2 つが逆符号なものでも可，さらに，これらの答と同位相なものも可)

(f) 6 点(2 点×3)

(g)

(g) 6 点



＊節が正しく図示できて 3 点（縁の部分が節として図示されていても正解とする）

＊腹が正しく図示できて 3 点