第2回10月京大本番レベル模試　(2018年10月21日実施)

採点基準　数学（文系・理系）

【共通事項】

１．約分の未了，根号内の整理不備は１点減点

２．分母の有理化の不備については減点なし

３．別解の配点は解答の配点に準ずる

【文系】(150点満点)

第1問（30点満点）

- 与式$(\mathrm{AD}^2+\mathrm{BC}^2)-(\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2)$をベクトルの式に直し，点Aを始点とするベクトルの式で表して6点
- 上記で導いた式から$(\mathrm{AD}^2+\mathrm{BC}^2)-(\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2)=2\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}$を導いて12点
- $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\dfrac{1}{2}$を導いて6点
- $\cos\theta=\dfrac{1}{4}$を求めて6点

第2問（30点満点）

- 三角形APQの面積をS，Cと直線mで囲まれた図形の面積をTとして，$S=T$となるときのtを求める方針を立てて4点
- 直線lの方程式を求め，Aの座標をtで表して4点
- 直線mの方程式を求め，Bの座標をtで表して4点
- Qのx座標をtで表して6点
- S, Tをそれぞれtで表して8点(各4点)
- 答えに4点

第3問（30点満点）

- 確率を求める事象の余事象が「どの隣り合う3枚の数の和も奇数である」ことを述べて4点
- 3整数の和が奇数となる並べ方4通りを示して12点
- 求めた並べ方の場合の数を求めて8点
- 途中の計算と答えに6点

第4問（30点満点）

(1)（配点10点）

- $\mathrm{AP}=2\cos\angle\mathrm{BOM}$を導いて3点
- 正しく証明できて7点

(2)（配点 20 点）

- $\mathrm{PN}=2\cos B\cos C$ を正しく導いて 8 点
- $\mathrm{NL}=2\cos B\cos C$ を正しく導き，証明できて 12 点

第 5 問（30 点満点）

(1)（配点 8 点）

- $f(x)=0$ のもう一つの解を β とおき，解と係数の関係から a, b をそれぞれ α, β で表して 4 点
- 証明できて 4 点

(2)（配点 22 点）

- $h(x)=3x^2+2ax+b$ とおき，$f(x)$ を $h(x)$ で割って，さらに $f(\alpha)=h(\alpha)=0$ から

  $2(3b-a^2)\alpha+9c-ab=0$ を導いて 6 点
- $3b-a^2=0$ のとき，α が整数となることを証明できて 6 点
- $3b-a^2\neq 0$ のとき，α が有理数となることを述べて 3 点
- $\alpha=\dfrac{p}{q}$（p, q は互いに素な整数，$p>0$）とおき，$q^3=-p(aq^2+bpq+cp^2)$ を求めて 3 点
- 正しく証明できて 4 点

【理系】（200 点満点）

第 1 問（30 点満点）

- $\triangle \mathrm{ABC}$ に余弦定理を適用し，$(1+3\cos 2\alpha)R=3(1-\cos 2\alpha)$ を求めて 8 点
- R を $\sin\alpha$ で表して 15 点
- 答えに 7 点

第 2 問（35 点満点）

- 与式 $(\mathrm{AD}^2+\mathrm{BC}^2)-(\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2)$ をベクトルの式に直し，点 A を始点とするベクトルの式で表して 7 点
- 上記で導いた式から $(\mathrm{AD}^2+\mathrm{BC}^2)-(\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2)=2\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ を導いて 14 点
- $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\dfrac{1}{4}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}$ を導いて 7 点
- $\cos\theta=\dfrac{1}{4}$ を求めて 7 点

第 3 問（30 点満点）

- N 回で記録される数字が 2 または 4 または 6 である確率を求めて 5 点
- N 回で 2，4，6 のすべてが記録される事象の余事象が，N 回で 2，4，6 の少なくとも 1 種類は記録されない事象であることを述べて 3 点
- 2，4，6 のうち 1 つが記録されない確率をそれぞれ求めて 3 点
- 2，4，6 のうち 1 つだけ記録される確率をそれぞれ求めて 6 点
- 記録される数字がない確率を求めて 2 点
- 上記の余事象の確率を立式の根拠と合わせて答えを求めて 9 点
- 求める確率に 2 点

第 4 問（35 点満点）

(1)（配点 7 点）

- $\left(\dfrac{1}{x_k}-p\right)^N=1$ を x_k の定義から導いて 5 点
- 正しく証明できて 2 点

(2)（配点 16 点）

- $\left(\dfrac{1}{z}-p\right)^N=1$ を式変形し，N が奇数であることから，これが $z^N+(pz-1)^N=0$ と同値であることを述べて 4 点
- 上記で導いた等式の左辺が z の N 次の多項式であることを導いて 4 点
- 解と係数の関係に着目し，答えを求めて 8 点

(3)（配点 12 点）

- $\dfrac{N}{S_N}=-\left(1-\dfrac{1}{N}\right)\left\{1-\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^N}\right\}$ を導いて 6 点
- 答えに 6 点

第 5 問（35 点満点）

(1)（配点 8 点）

- 数学的帰納法で示す方針を立て，$n=1, 2$ のとき S_n が整数であることを述べて 2 点
- $n=k, k+1$ のとき S_n が整数であることを仮定し，S_{k+2} を S_{k+1}, S_k で表して 4 点
- 証明できて 2 点

(2)（配点 27 点）

- ${S_n}^p - S_{pn} = \sum_{k=1}^{p-1} {}_p\mathrm{C}_k (\alpha^n)^{p-k}(\beta^n)^k$ と導いて 4 点
- $p=2$ のとき，${S_n}^p - S_{pn}$ が p の倍数となることを述べて 2 点
- $p \geqq 3$ のとき，$\dfrac{p-1}{2}=m$ （m は自然数）とおき，${}_p\mathrm{C}_k = {}_p\mathrm{C}_{p-k}$ であることなどを利用して $\sum_{k=1}^{p-1} {}_p\mathrm{C}_k (\alpha^n)^{p-k}(\beta^n)^k$ を $\sum_{k=1}^{m} {}_p\mathrm{C}_k (-b)^{nk} S_{n(p-2k)}$ まで式変形できて 18 点
- 証明できて 3 点

第 6 問（35 点満点）

(1)（配点 14 点）

(i)（配点 8 点）

- 部分積分ができて 4 点
- 正しく証明できて 4 点

(ii)（配点 6 点）

- 途中計算と答えに 6 点

(2)（配点 21 点）

(i)（配点 8 点）

- K の断面図を正しくとらえ，θ を正しく設定できて 4 点
- 途中の計算と答えに 4 点

(ii)（配点 13 点）

- 求める体積 V を正しくとらえ，θ のみの積分の式に直して 4 点
- (1)を利用して，体積 V を I, J を用いて表して 7 点
- 答えに 2 点