2022 年度最終　京大本番レベル模試

採点基準　数学（文系）

【共通事項】

1．約分の未了，根号内の整理不備は 1 点減点

2．分母の有理化の不備については減点なし

3．別解の配点は解答の配点に準ずる

【文系】（150 点満点）

第 1 問　(30 点満点)

- 点 P の x 座標を p，C と l の交点のうち P と異なるものの x 座標を q としたとき，l の傾きを p, q で表して 6 点
- 上記の q を p で表して 6 点
- S を p, q で表して 6 点
- S を p のみで表して 6 点
- $p>0$ や等号成立条件を述べた上で最小値を求めて 6 点

第 2 問　(30 点満点)

- 事象 A の余事象の 2 つの排反な事象を示して 4 点
- 事象 A の起こる確率 $P(A)$ を求めて 4 点
- P_k を求めて 4 点
- $\sum_{k=0}^{n} 6^k P_k$ を求め，題意の不等式を $\left(\frac{33}{8}\right)^n \geqq 2000$ と言い換えて 6 点
- $n \geqq 6$ のとき上記の不等式が成り立つことを示して 4 点
- $n \leqq 5$ のとき上記の不等式が成り立たないことを示して 4 点
- 答えに 4 点

第 3 問　(30 点満点)

- 条件$(*)$を満たす P, Q に対して，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ となる点 C を考えて 8 点
- B と C が平面 β に関して反対側にあることを述べた上で，$\mathrm{AP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QB} \geqq \mathrm{CB}+2=14$ を示して 10 点
- 上記の不等式における等号の成立条件を述べて 2 点
- 上記の不等式の等号が成立するときの Q, P の座標を求めて 10 点

第 4 問　(30 点満点)

- $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を述べて 6 点(各 2 点)

- $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で定まる点Hが$\triangle$ABCの垂心であることを述べ，それを証明して12点
- 上記の点Hに対して，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{QH}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{RH}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を示して6点(各2点)
- $\left|\overrightarrow{\mathrm{PH}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{QH}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{RH}}\right|$を示し，証明の結論を述べて6点

第5問　(30点満点)

- ある整数a, b $(a>b\geqq 1)$を用いて$2N=a^2+b^2$と設定して 4点
- 上記のNを$N=\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$のように平方の和に変形して12点
- aとbの偶奇が一致することを述べて4点
- $\dfrac{a+b}{2}$, $\dfrac{a-b}{2}$がいずれも整数であることを述べて4点
- 証明の結論を述べて6点

【理系】(200 点満点)

第 1 問　(30 点満点)

- 点 P の x 座標を p, C と l の交点のうち P と異なるものの x 座標を q としたとき, l の傾きを p, q で表して 6 点
- 上記の q を p で表して 6 点
- 線分 PQ の長さ L を p で表して 6 点
- L の式において $t=\sqrt{p^2+1}$ などとおき, t の関数として微分して 6 点
- 答えに 6 点

第 2 問　(30 点満点)

- 事象 A の余事象の 2 つの排反な事象を示して 4 点
- 事象 A の起こる確率 $P(A)$ を求めて 4 点
- P_k を求めて 4 点
- $\sum_{k=0}^{n} 6^k P_k$ を求め, 題意の不等式を $\left(\frac{33}{8}\right)^n \geqq 2000$ と言い換えて 6 点
- $n \geqq 6$ のとき上記の不等式が成り立つことを示して 4 点
- $n \leqq 5$ のとき上記の不等式が成り立たないことを示して 4 点
- 答えに 4 点

第 3 問　(35 点満点)

- $\alpha+\beta+\gamma=2,\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=2,\ \alpha^3+\beta^2+\gamma^2=5$ に 3 点(各 1 点)
- $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ を求めて 2 点
- $\alpha\beta\gamma$ を求めて 5 点
- α, β, γ を解にもつ 3 次方程式を述べて 2 点
- $A_{n+3}=2A_{n+2}-A_{n+1}+A_n$ を示して 6 点
- A_1, A_2, A_3 が整数であることから A_n が整数となることを述べて 2 点
- $A_{n+3} \equiv 2A_{n+2}-A_{n+1}+A_n \pmod 4$ を述べて 2 点
- $A_4, A_{5,}, \cdots\cdots, A_{10}$ を 4 で割った余りを正しく計算して求めて 7 点(各 1 点)
- A_n を 4 で割った余りが $2, 2, 1, 2, 1, 1, 3$ の繰り返しであることを述べて 3 点
- 答えに 3 点

第 4 問　(30 点満点)

- $\frac{1}{1+p}$ を極形式で表して 10 点
- $\triangle \mathrm{OPQ}=\triangle \mathrm{OQR}$ から $-2\sin 3\theta=\sin\theta$ を導いて 10 点
- $\sin^2\theta=\frac{7}{8}$ を導いて 5 点

- 答えに 10 点

第 5 問　(35 点満点)

- 極方程式 $r=\theta$ で表される曲線上の点を直交座標 $x=\theta\cos\theta,\ y=\theta\sin\theta$ で表して 4 点
- 上記のもと $\dfrac{dx}{d\theta}, \dfrac{dy}{d\theta}$ を求めて 6 点(各 3 点)
- $L_n=\displaystyle\int_n^{n+1}\sqrt{\theta^2+1}\,d\theta$ を求めて 6 点
- $\displaystyle\int_n^{n+1}\theta\,d\theta < L_n < \int_n^{n+1}(\theta+1)d\theta$ を示して 8 点
- 上記から $1+\dfrac{1}{2n}<\dfrac{L_n}{n}<1+\dfrac{3}{2n}$ を示して 6 点
- 答えに 5 点

第 6 問　(35 点満点)

(1)(配点 12 点)

- $\cos^2 x=\dfrac{a}{\tan a}$ が $\dfrac{\tan a}{a}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ と同値であることを述べて 2 点
- $\tan x$ に関する平均値の定理に活用に 4 点
- $\cos^2 x$ が $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において単調減少であることを述べ，さらに $\cos^2 x=\dfrac{a}{\tan a}$ を満たす x が存在してもただ 1 つであることを示して 4 点
- 証明の結論を述べて 2 点

(2)(配点 23 点)

- $\left(\dfrac{x_a}{a}\right)^2=\left(\dfrac{x_a}{\sin x_a}\right)^2\cdot\dfrac{1-\dfrac{a}{\tan a}}{a^2}$ と変形して 7 点
- 十分小さな正の数 a に対して，$(*)$ から

  $$\frac{1}{3+a^2}<\frac{1-\dfrac{a}{\tan a}}{a^2}<\frac{40+a^2}{120-20a^2+a^4}$$ が成り立つことを述べて 6 点
- 上記から $\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{1-\dfrac{a}{\tan a}}{a^2}=\frac{1}{3}$ を求めて 5 点
- 答えに 5 点