第 2 回 10 月京大本番レベル模試　（2019 年 10 月 14 日実施）

採点基準　数学（文系・理系）

【共通事項】

１．約分の未了，根号内の整理不備は１点減点

２．分母の有理化の不備については減点なし

３．別解の配点は解答の配点に準ずる

【文系】（150 点満点）

第 1 問（30 点満点）

(1)（配点 12 点）

- S_1 , S_2 をそれぞれ求めて 10 点(各 5 点)
- 答えに 2 点

(2)（配点 18 点）

- c を a, b で表して 6 点
- s, $s-c^2$, $s-c^3$ をそれぞれ c で表して 6 点(各 2 点)
- 考え方と答えに 6 点

第 2 問（30 点満点）

- $\theta=0$ のときに対する言及と，三角形 BPR に正弦定理を適用して 12 点
- l を θ で表して 6 点
- $\sin\left(\frac{2}{3}\pi-2\theta\right)$ の取り得る値を求めて 6 点
- 答えに 6 点

第 3 問（30 点満点）

(1)（配点 15 点）

- $n\geqq 2$ のとき， $g_n=2$ となる確率を求めて 4 点
- $n\geqq 2$ のとき， $g_n=3$ となる確率を求めて 3 点
- $n\geqq 2$ のとき， $g_n=4, 5, 6$ となるときの確率を求めて 2 点
- $n=1$ のときも含め， p_n を求める途中の計算と答えに 6 点

(2)（配点 15 点）

- $n\geqq 2$ のとき， $g_{n-1}\neq 1$ かつ $g_n=1$ となる場合を考えればよいことを述べて 5 点
- $n\geqq 2$ のとき， $q_n=p_n-p_{n-1}$ となることを述べて 5 点
- 答えに 5 点

第４問（30 点満点）

(1)（配点 25 点）

- O から平面 ABC，直線 BC に下ろした垂線 OH, OI とそれぞれの長さを文字で設定して 3 点
- $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ のときの V を求めて 3 点
- $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，上記の H と I が異なる点であることと，$\mathrm{HI}\perp\mathrm{BC}$ であることを述べて 4 点
- OH と OI の長さの関係を求めて 5 点
- OI，OH の長さをそれぞれ求めて 4 点（各 2 点）
- V を求め，$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ のときも含まれることに言及して 6 点

(2)（配点 5 点）

- 証明できて 5 点

第５問（30 点満点）

(1)（配点 10 点）

- 3^n を 6 進数で表したとき，$b_n\cdot 6^{a_n-1}\leqq 3^n<(b_n+1)\cdot 6^{a_n-1}$ であることを述べて 2 点
- $b_n=1$ のとき，$2\leqq b_n\leqq 5$ のときに分けて証明できて 8 点(各 4 点)

(2)（配点 20 点）

- $n\leqq 2019$ かつ $b_n=1$ となる n の個数を N とおいたとき，$N=2020-a_{2020}$ を導いて 6 点
- $a_{2020}=A$ としたとき，$A-1\leqq 2020\cdot\log_6 3<A$ を導いて 6 点
- $1238<2020\cdot\log_6 3<1239$ を導いて 6 点
- 答えに 2 点

【理系】（200 点満点）

第 1 問（30 点満点）

- $\angle \mathrm{BAR}=\theta \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{6}\right)$ のように角を設定し，三角形 BPR に正弦定理を適用して 12 点
- l を上記の θ で表して 6 点
- $\sin\left(\dfrac{2}{3}\pi-2\theta\right)$ の取り得る値を求めて 6 点
- 答えに 6 点

第 2 問（30 点満点）

(1)（配点 25 点）

- O から平面 ABC，直線 BC に下ろした垂線 OH, OI とそれぞれの長さを文字で設定して 3 点
- $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ のときの V を求めて 3 点
- $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，上記の H と I が異なる点であることと， $\mathrm{HI}\perp\mathrm{BC}$ であることを述べて 4 点
- OH と OI の長さの関係を求めて 5 点
- OI， OH の長さをそれぞれ求めて 4 点（各 2 点）
- V を求め， $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ のときも含まれることに言及して 6 点

(2)（配点 5 点）

- 証明できて 5 点

第 3 問（35 点満点）

(1)（配点 17 点）

- 動点 P が偶数秒後と奇数秒後にいる頂点について述べ， P の状態推移を述べて 7 点
- n が偶数のとき， $p_n=0$ を述べて 2 点
- p_n の漸化式を導いて 5 点
- 答えに 3 点

(2)（配点 18 点）

- n が奇数のとき， P, Q それぞれが点 B, D, F, H にある確率を求めて 3 点
- n が奇数のときの x_n を求めて 4 点
- n が偶数のとき， P, Q それぞれが点 A, C, E, G にある確率を求めて 7 点
- 答えに 4 点

第 4 問（35 点満点）

(1)（配点 15 点）

- 数学的帰納法で示す方針を立て， a_1 , a_2 の値から自然数となることを述べて 2 点

- $a_{n+2}=a_{n+1}+\dfrac{p^2-1}{4}a_n$ となることを導いて 9 点
- 証明の結論までが述べられて 4 点

(2)（配点 20 点）

- q が奇素数であることを述べて 2 点
- a_q を二項定理を用いて，$a_q=\dfrac{1}{2^q p}\sum_{i=0}^{q} {}_q\mathrm{C}_i\{p^i-(-p)^i\}$ を導いて 2 点
- $2^{q-1}a_q=p^{q-1}+(q\text{の倍数})$ となることまで導けて 8 点
- q が p の約数となることを求め，逆(十分性)も確認して結論できて 8 点

第 5 問（35 点満点）

- $f(x)$ の 3 次の係数を 1 としてよいことが述べられて 2 点
- $f(x)=0$ の実数解を a，虚数解を $b\pm ci$ のように設定し，$f(x)$ の係数を設定できて 5 点
- $f'(x)=0$ の解を上記の a,b,c で表して 4 点
- $f(x)=0$，$f'(x)=0$ の両方の解を実軸方向に $-a$ 平行移動し，それら（5 つ）の解を点にとって，複素数平面上での位置関係を考える方針を立てて 9 点
- $f'(x)=0$ の解が実数解であるときの，5 つの解（点）の位置関係を述べて 4 点
- $f'(x)=0$ の解が虚数解であるときの，5 つの解（点）の位置関係を述べて 9 点
- 証明を結論できて 2 点

第 6 問（35 点満点）

(1)（配点 18 点）

- $e^{n(1-x)}$ が単調減少であること，$\sin x$ は $1\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で単調増加であることを述べて 4 点
- $(*)$ が $1<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲にただ 1 つの解をもつことを証明できて 6 点
- a_n の定義から $1<a_n<1+\dfrac{1}{n}\log\left(\dfrac{1}{\sin 1}\right)$ となることを示して 6 点
- 答えに 2 点

(2)（配点 17 点）

- S_n を a_n で表して 4 点
- $\dfrac{S_n}{a_n-\alpha}$ を a_n で表して 3 点
- $\lim_{n\to\infty} n(a_n-1)$ と $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\cos a_n-\cos 1}{a_n-1}$ を求めて 8 点（各 4 点）
- 答えに 2 点