第１回７月東北大本番レベル模試　（2020 年 7 月 18 日実施）

採点基準　数学（文科系・理科系）

【共通事項】

１．約分の未了，根号内の整理不備は１点減点

２．分母の有理化の不備については減点なし

３．別解の配点は解答の配点に準ずる

【文系】（200 点満点）

第１問（50 点満点）

(1)（配点 20 点）

- C_1 上の点 (t, t^2-1) における接線の方程式を求め，一般形に直して 6 点
- 上記の接線が C_2 に接することを式で表し，t の値を求めて 10 点
- 答えに 4 点

(2)（配点 30 点）

- C_1 上の点 (t, t^2-1) における接線が C_2 と異なる 2 点で交わる条件を不等式で表し，t^2(または t)のとり得る値の範囲を求めて 8 点
- 2 点で切り取られる線分の長さが最大になるのは，C_2 の中心 $(0, 1)$ とこの接線との距離 d が最小になるときであることを述べて 4 点
- 上記の d に対して，$d^2 \geqq \dfrac{7}{4}$ が成り立つことを示し，等号が成り立つときの t^2(または t)の値を求めて 8 点
- C_2 の中心 $(0, 1)$ とこの接線との距離の最小値を求めて 3 点
- 2 点で切り取られる線分の長さの最大値を求めて 7 点

第２問（50 点満点）

(1)（配点 26 点）

- 最初に箱に入っている球の個数を求めて 3 点
- それぞれの玉を区別したとき，2 回で取り出す取り出し方の総数を求めて 6 点
- 1 回目，2 回目に取り出した玉を x_1, x_2 としたとき，$3 \leqq x_1 + x_2 \leqq 2n$ を述べて 5 点
- $x_1 + x_2 \geqq 2n$ となる x_1, x_2 とその場合の数を求めて 6 点
- 答えに 6 点

(2)（配点 12 点）

- (1)の x_1, x_2 に対して，$x_1 + x_2 = 2n-1$ となる場合の数を求めて 6 点
- 答えに 6 点

(3)（配点 12 点）

- (1)の x_1, x_2 に対して，$x_1 + x_2 = 2n-2$ となる場合の数を求めて 6 点
- 答えに 6 点

第 3 問（50 点満点）

(1)（配点 20 点）

- $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき，被積分関数の絶対値記号を外して 3 点
- $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ のときの答えに 7 点
- $\dfrac{1}{2} < x \leqq 1$ のとき，被積分関数の絶対値記号を外して 3 点
- $\dfrac{1}{2} < x \leqq 1$ のときの答えに 7 点

(2)（配点 30 点）

- $f(x)$ を $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ と $\dfrac{1}{2} < x \leqq 1$ に分け，正確に表記できて 10 点
- $f'(x)$ を $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ と $\dfrac{1}{2} < x \leqq 1$ に分け，正確に表記できて 10 点
- $f(x)$ の増減を調べ，$x = \dfrac{1}{3}$ で極大かつ最大であることを述べて 5 点
- 答えに 5 点

第 4 問（50 点満点）

(1)（配点 30 点）

- 点 C, D の位置ベクトルを求めて 5 点
- 点 E の位置ベクトルをパラメータ t などを用いて表して 5 点
- $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ を上記の t と $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表して 5 点
- $\overrightarrow{\mathrm{CD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CE}} = 0$ から t の値を求めて 11 点
- 答えに 4 点

(2)（配点 20 点）

- 点 F を線分 BC, DE 上の点とし，パラメータ α, β などを用いてそれぞれ表して 10 点(各 5 点)
- 途中の計算と答えに 10 点

【理系】（300 点満点）

第 1 問（50 点満点）

(1)（配点 10 点）

- 方程式①を $x+\dfrac{1}{x}$ の 2 次方程式に変形できて 5 点
- 途中の計算と答えに 5 点

(2)（配点 10 点）

- (1)で求めた t の値から 2 つの x の 2 次方程式を求めて 5 点
- 答えに 5 点

(2)（配点 30 点）

- 題意の 4 次方程式を t の 2 次方程式で表して 4 点
- 上記の t の 2 次方程式の 1 つの解を α のように表したとき α の値の範囲を求めて 6 点
- 題意の 4 次方程式のすべての解が実数となる条件を述べて 5 点
- 上記の t の 2 次方程式の左辺を $f(t)$ のようにおき，そのグラフが満たすべき条件を述べて 5 点
- 途中の計算と答えに 10 点

第 2 問（50 点満点）

(1)（配点 10 点）

- すべての場合の数を求めて 3 点
- $V=0$ となるときの x_1～x_n に関する説明に 5 点
- 答えに 2 点

(2)（配点 15 点）

- $V=1$ となるときの x_1～x_n に関する説明に 11 点
- 答えに 4 点

(3)（配点 25 点）

- $V=2$ となるときの x_1～x_n に関する説明に 16 点
- 途中の計算と答えに 9 点

第 3 問（50 点満点）

(1)（配点 15 点）

- $b-a=1,\ b+a=c$ を導き，さらに b が 3 以上の奇数であることを述べて 5 点
- a が奇数とすると，矛盾することを示して 5 点
- 答えに 5 点

(2)（配点 11 点）

- $a^2b^2=c+1$ を満たす素数 $a,\ b,\ c$ が存在すると仮定して 3 点
- $(ab-1)(ab+1)=c$ から矛盾を導いて 5 点
- 証明の結論を述べて 3 点

(3)（配点 24 点）

- 題意の式を $a^2b^2=k(c+k)$ と変形し，a^2b^2 の正の約数を正しく列挙して 5 点
- k と $c+k$ の組合せを正しく列挙して 5 点
- 上記から c を求めて 5 点
- 答えに 9 点

第 4 問（50 点満点）

(1)（配点 35 点）

- $\mathrm{A}(0,6), \mathrm{B}(-2\sqrt{3},0), \mathrm{C}(2\sqrt{3},0)$ などのように設定して 5 点
- 上記の設定と $\mathrm{P}(x,y)$ とおいたとき，$x^2+(y-1)^2 \leqq 25$ を導いて 10 点
- 領域の境界の点 $\mathrm{D}\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$ を求めて 5 点
- $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ が最大となるとき，最小になるときについてそれぞれ述べて 10 点(各 5 点)
- 答えに 5 点

(2)（配点 15 点）

- (1)の設定の下，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ を x, y で表し，さらに直線 $2\sqrt{3}x+6y=12=k$ が直線 AD と平行であることを述べて 5 点
- 上記の k が最大となるとき，最小となるときを考え，答えを求めて 10 点

第 5 問（50 点満点）

(1)（配点 19 点）

- $f(x)=x-\log(x+1)$ のようにおいたとき，$0<x<2$ で $f(x)$ が単調増加であることを示し，さらに $f(0)=0$ から $f(x)>0$ を述べて 7 点
- $g(x)=\log(x+1)-\left(x-\dfrac{1}{2}x^2\right)$ のようにおいたとき，$0<x<2$ で $g(x)$ が単調増加であることを示し，さらに $g(0)=0$ から $g(x)>0$ を述べて 7 点
- 上記の証明のもと，結論を述べて 5 点

(2)（配点 31 点）

- (1)から，$0<x<2$ のとき，不等式
  $\dfrac{1-\cos x}{x^2}<\dfrac{1-\cos x}{x\log(x+1)}<\dfrac{1-\cos x}{x^2\left(1-\dfrac{1}{2}x\right)}$ が成り立つことを述べて 6 点
- 上記の不等式の左辺と右辺の極限値を求めて 15 点
- はさみうちの原理から答えを求めて 10 点

第 6 問（50 点満点）

(1)（配点 10 点）

- 部分積分法を用いて答えを求めて 10 点(積分定数がないときは 7 点)

(2)（配点 30 点）

- $x<0$ のときの $f(x)$ を求めて 5 点
- $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のときの $f(x)$ を求めて 15 点
- $\dfrac{\pi}{2}<x$ のときの $f(x)$ を求めて 5 点
- 答えを整理して 5 点

(3)（配点 10 点）

- すべての実数 x に対し，$f'(x)$ が単調増加であることを示して 5 点
- 残りの証明に 5 点