2020年第2回10月東北大本番レベル模試　（2020年10月18日実施）

採点基準　数学（文系）

【共通事項】

１．約分の未了，根号内の整理不備は１点減点

２．分母の有理化の不備については減点なし

３．別解の配点は解答の配点に準ずる

【文系】（200点満点）

第1問（50点満点）

(1)（配点20点）

- $\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=c:b$ であることを述べて3点
- $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表して3点
- $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=l\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ （l は実数）のように置いたとき，l を a, b, c で表して9点
- $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を用いて表して5点

(2)（配点30点）

- $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表して5点
- $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を用いて表して7点
- 点Gが直線EF上にあることから，$a^2=b^2+c^2-bc$ を導いて8点
- 余弦定理から $\cos\angle\mathrm{BAC}$ の値を求めて5点
- 答えに5点

第2問（50点満点）

(1)（配点20点）

- 2円 C_1 と C_2 の中心間の距離を k で表して3点
- 2円 C_1 と C_2 の中心間の距離のとり得る範囲を求めて5点
- 2円 C_1 と C_2 の半径の和，差と中心間の距離の大小を述べて10点
- 残りの証明に2点

(2)（配点30点）

- 2円 C_1 と C_2 の共有点を通る C_2 以外の曲線を表し，直線となる場合を述べて5点
- 直線 L の方程式を求めて5点
- ある点が直線 L の通過する範囲にあるための条件を求めて5点
- 上記の条件を k の2次方程式が $-1\leqq k\leqq 1$ に解をもつ条件と言い換え，通過領域を x, y の不等式で表して6点
- 境界の直線と放物線の接点の座標に3点
- 図示に6点

第 3 問（50 点満点）

(1)（配点 20 点）

- $a^3+b^3-(a+b)^2$ の因数分解に 6 点
- a^2-ab+b^2-a-b が正であることを示す式変形に 7 点
- 残りの証明に 7 点

(2)（配点 30 点）

- 背理法の仮定に 3 点
- $a \neq b$ のとき，$a+b=p^2$ とした場合，$a+b=p^3$ とした場合のいずれも矛盾することを示して 10 点
- $a \neq b$ のとき，$a+b=p$ とした場合に矛盾することを示して 7 点
- $a=b$ のとき，等式を満たす自然数 a が存在しないことを証明して 7 点
- 証明の結論を述べて 3 点

第 4 問（50 点満点）

(1)（配点 20 点）

- 同色の球を区別するとき，3 個から 2 個取り出す場合の数を求め，同様に確からしいことを述べて 5 点
- ちょうど 2 回の試行ですべて白球になるときの個数の変化と取り出し方に 10 点
- 答えに 5 点

(2)（配点 30 点）

- 選び方の総数を求め，さらに同様に確からしいことを述べて 5 点
- ちょうど 2 回の試行ですべて白球になるときの個数の変化と取り出し方の場合の数に 10 点
- $P(n)$ を求めて 5 点
- 上記の $P(n)$ が(1)の $P(3)$ と一致することを述べて 5 点
- 答えに 5 点

2020 年第 3 回 10 月九大本番レベル模試　（2020 年 10 月 18 日実施）

採点基準　数学（理系）

【共通事項】

１．約分の未了，根号内の整理不備は１点減点

２．分母の有理化の不備については減点なし

３．別解の配点は解答の配点に準ずる

【理系】（300 点満点）

第 1 問（50 点満点）

- ある点(X, Y)が曲線Cが通過する領域の点であるための必要十分条件に 5 点
- 上記を移項してaの 3 次関数$f(a)$のようにおき，$f(a)=0$が$-1 \leqq a \leqq 2$に解をもつためのXとYの条件と言い換えて 5 点
- $X=0$のとき，Yのとり得る値の範囲を求めて 5 点
- $X>0$のとき，$f(a)=0$が$-1 \leqq a \leqq 2$に解をもつ条件を述べて 5 点
- $f(a)$が極大値，極小値と一致するaの値を求めて 5 点
- 上記のXの値による場合分けと，$-1 \leqq a \leqq 2$における最大値，最小値に 6 点
- 上記をX, Yの不等式で表して 6 点
- 境界の曲線が接する点を求めて 5 点
- 図示に 8 点

第 2 問（50 点満点）

(1)（配点 20 点）

- $a^3+b^3-(a+b)^2$の因数分解に 6 点
- a^2-ab+b^2-a-bが正であることを示す式変形に 7 点
- 残りの証明に 7 点

(2)（配点 30 点）

- 背理法の仮定に 3 点
- $a \neq b$のとき，$a+b=p^2$とした場合，$a+b=p^3$とした場合のいずれも矛盾することを示して 10 点
- $a \neq b$のとき，$a+b=p$とした場合に矛盾することを示して 7 点
- $a=b$のとき，等式を満たす自然数aが存在しないことを証明して 7 点
- 証明の結論を述べて 3 点

第 3 問（50 点満点）

(1)（配点 20 点）

- 同色の球を区別するとき，4 個から 2 個取り出す場合の数を求め，同様に確からしいことを述べて 5 点
- ちょうど 3 回の試行ですべて白球になるときの個数の変化と取り出し方に 11 点
- 答えに 4 点

(2)（配点 30 点）

- 選び方の総数を求め，さらに同様に確からしいことを述べて 4 点
- ちょうど 3 回の試行ですべて白球になるとき, 赤球が(1)と同様の個数の変化をするときの取り出し方の場合の数に 11 点
- ちょうど 3 回の試行ですべて白球になるとき, 最初に白球 2 個を取り出す 2 つの場合の個数の変化と取り出し方の場合の数に 10 点
- 上記の場合の数の和に 2 点
- $P(n)$を求めて 3 点

第 4 問（50 点満点）

(1)（配点 20 点）

- $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ の成分から$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|$を求めて 7 点
- $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$ の成分から$\left|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}\right|$を求めて 13 点

(2)（配点 10 点）

- 動点 P が$(1,1,\sqrt{2}),(1,-1,0)$で定まる平面に平行で，点 A を通る平面上にあることを述べて 4 点
- 動点 P が点 A からの距離が 2 の球面上にあることを示して 4 点
- 残りの証明に 2 点

(3)（配点 20 点）

- $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$ の式から$\left|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{DQ}}\right|$が一定の値となる D の座標を設定し，$\left|\overrightarrow{\mathrm{DQ}}\right|$を求めて 7 点
- $\left|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{DQ}}\right|=4$であることを示して 5 点
- 点 Q, D が点 B を通る同一平面上の点であることを述べて 5 点
- 残りの証明に 3 点

第 5 問（50 点満点）

(1)（配点 20 点）

- $z^2+\dfrac{1}{z^2}$の実数条件に 5 点
- $z^2+\dfrac{1}{z^2}=\overline{z^2+\dfrac{1}{z^2}}$を変形し，$z=\overline{z}$, $z=-\overline{z}$, $\left|z\right|=1$まで導いて 10 点
- 図示に 5 点

(2)（配点 30 点）

- $w=\dfrac{1}{z+i}$ のように置いたとき，$z=\dfrac{1}{w}-i$ と変形して 3 点
- B を上記の w の集合で，3 つの等式のいずれかが成り立つものであることを述べて 3 点
- $\dfrac{1}{w}-i=\overline{\dfrac{1}{w}-i}$ を w の軌跡が分かる形まで変形して 7 点
- $\dfrac{1}{w}-i=-\left(\overline{\dfrac{1}{w}-i}\right)$ を w の軌跡が分かる形まで変形して 5 点
- $\left|\dfrac{1}{w}-i\right|=1$ から w の軌跡を求めて 7 点
- 図示に 5 点

第 6 問（50 点満点）

(1)（配点 15 点）

- x, y をそれぞれ θ で微分して 5 点
- 増減表に 5 点
- C の概形に 5 点

(2)（配点 8 点）

- 点 Q の座標を θ で表して 4 点
- s を θ で表して 4 点

(3)（配点 27 点）

- 接線の傾きが -1 であるような曲線 C 上の点 T を定め，T を通り l と直交する直線と l の交点を設定して 4 点
- 回転体の体積 V を s に関する定積分を用いて表して 4 点
- PQ の長さを θ で表して 2 点
- $\dfrac{ds}{d\theta}$ を求めて 3 点
- V の計算と答えに 14 点