2021 年第 1 回 6 月東北大本番レベル模試　(2021 年 6 月 6 日実施)

採点基準　数学(文系)

【共通事項】

１．約分の未了，根号内の整理不備は１点減点

２．分母の有理化の不備については減点なし

３．別解の配点は解答の配点に準ずる

【文系】(200 点満点)

第 1 問(50 点満点)

(1) (配点 18 点)

- 点 P, Q, R の座標を t で表して 8 点
- 点 G の座標を t で表して 6 点
- 上記の点 G の座標が $t=0, 1$ のときも一致することを確認して 4 点

(2) (配点 32 点)

- 点 G の座標を (X, Y) とおいたとき， X と Y の関係を求めて 10 点
- 点 G の軌跡 K を求めて 6 点
- 三角形 OAB と軌跡 K を図示して 4 点
- 求める三角形の面積が三角形 OAB の $\dfrac{4}{9}$ 倍であることを述べて 6 点
- 面積比を求めて 6 点

第 2 問(50 点満点)

(1) (配点 36 点)

- この試行の事象の総数を求め，さらに同様に確からしいことを述べて 7 点
- 作られる整数が 7 で割って $2a+3b+c$ の形であることを述べて 4 点
- b の値に対応する a, c の組をそれぞれ求めて 18 点(各 3 点)
- 確率を求めて 7 点

(2) (配点 14 点)

- この試行の事象の総数を求め，さらに同様に確からしいことを述べて 7 点
- 確率を求めて 7 点

第 3 問(50 点満点)

(1) (配点 25 点)

- $x < 3$ のとき $F(x)$ を求めて 7 点
- $x \geqq 3$ のとき $F(x)$ を求める定積分の式が正しく書けて 4 点
- $x \geqq 3$ のとき $F(x)$ を求めて 8 点
- 上記の $F(x)$ を 1 つの関数にまとめて書いて 6 点

(2) (配点 25 点)

- $x < 3$ と $x \geqq 3$ それぞれで $F(x)$ の導関数を正しく求めて 6 点
- $-2 \leqq x \leqq 8$ での $F(x)$ の増減を正しく述べて 11 点
- $-2 \leqq x \leqq 8$ で $F(x)$ がとりうる値の範囲を求めて 8 点

第 4 問(50 点満点)

(1) (配点 16 点)

- $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\vec{d}$ (k は実数)のように表し，$\mathrm{PA} \perp l$ をベクトルの内積の条件に直して 5 点
- $k = \vec{a} \cdot \vec{d}$ を導いて 6 点
- 答えに 5 点

(2) (配点 12 点)

- $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{d})$ を導いて 5 点
- 残りの証明に 7 点

(3) (配点 22 点)

- 2 点 A, B の座標の設定に 6 点
- $\vec{d}$ の成分表示の設定に 3 点
- 上記の設定の下で $\vec{a} \cdot \vec{d}$, $\vec{b} \cdot \vec{d}$ を求めて 4 点
- $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2$ を計算し，$\vec{d}$ に関わらない結論を導いて 6 点
- 正しい証明を行った上で結論を述べて 3 点

2021 年第 1 回 6 月東北大本番レベル模試　(2021 年 6 月 6 日実施)

採点基準　数学(理系)

【共通事項】

１．約分の未了，根号内の整理不備は 1 点減点

２．分母の有理化の不備については減点なし

３．別解の配点は解答の配点に準ずる

【理系】(300 点満点)

第 1 問 (50 点満点)

(1) (配点 31 点)

- α, β, γ および $\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\beta}, \dfrac{1}{\gamma}$ に関する解と係数の関係の 3 つの式を述べて 14 点(各 7 点)
- $c=-1$ を示して 5 点
- $\alpha\beta\gamma=1$ となることを述べて 2 点
- $a=-b$ を示して 10 点

(2) (配点 19 点)

- $x=1$ が $(*)$ の解であることを述べて 8 点
- $(*)$ の 3 つの解が $\beta, 1, \dfrac{1}{\beta}$ となることを示して 7 点
- $\beta, 1, \dfrac{1}{\beta}$ がこの順に公比 $\dfrac{1}{\beta}$ であることを明記した上で等比数列となることを述べて 4 点

第 2 問 (50 点満点)

(1) (配点 11 点)

- 2 回投げたとき出た目の積が 3 の倍数となる事象を A としたとき $P(\overline{A})$ を求めて 6 点
- 答えに 5 点

(2) (配点 22 点)

- 2 回投げたとき出た目の積が偶数となる事象を B としたとき，
  $P(A\cap B)=1-\left\{P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{B})\right\}$ を述べて 5 点
- $P(\overline{B})$，$P(\overline{A}\cap\overline{B})$ を求めて 12 点 $\left(P(\overline{B})\right.$ に 5 点，$\left.P(\overline{A}\cap\overline{B})\right.$ に 7 点$\left.\right)$
- 答えに 5 点

(3) (配点 17 点)

- 3 回投げたとき出た目の積が 4 の倍数となる事象の余事象について述べて 5 点
- 上記の余事象の確率を求めて 5 点
- 答えに 7 点

第 3 問（50 点満点）

(1) (配点 8 点)

- x, y の偶奇の 4 つの組合せが列挙できて 4 点
- 上記の組合せに対し題意の確認を行って 4 点

(2) (配点 17 点)

- x または y の一方を偶数，他方を奇数として良いことを述べて 3 点
- y が奇数であるとしたとき $y^2 \equiv 1 \pmod 8$, $z^2 \equiv 1 \pmod 8$ であることを示して 4 点
- $x^2 - xy = x(x-y) = z^2 - y^2 \equiv 0 \pmod 8$ であることを述べて 4 点
- 残りの証明に 6 点

(3) (配点 7 点)

- x または y が偶数ならば，それが 8 の倍数であることを述べて 3 点
- x, y, z すべてが奇数であるときの証明に 4 点

(4) (配点 18 点)

- $x = 8$ のとき $(y-4+z)(y-4-z) = -2^4 \cdot 3$ のように組を絞れる形に変形して 6 点
- 上記の変形の下，$y-4+z$ と $y-4-z$ の組合せをすべて列挙して 4 点
- 上記の y, z の組および答えに 8 点

第 4 問(50 点満点)

(1) (配点 10 点)

- $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ で表し，点 P の位置が分かる形に変形して 5 点
- 点 P の位置を重心 G を用いて述べて 5 点

(2) (配点 10 点)

- $\overrightarrow{\mathrm{AA'}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ で表して 3 点
- 内積 $\overrightarrow{\mathrm{BA'}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA'}} = 0$ から直線 BA′ と CA′ が直交することを示して 7 点

(3) (配点 30 点)

- 辺 BC の中点を M としたとき，三角形 AMD 上で考えればよいことを述べて 4 点
- 上記の M に対し AM, DM の長さを求めて 4 点
- 対称性から H, G が DM 上にあることを述べ，位置関係を図示して 8 点
- 上記の M に対し MH の長さを求めて 5 点
- AH の長さを求めて 4 点
- PE の長さを求めて 5 点

第 5 問(50 点満点)

(1) (配点 17 点)

- 数学的帰納法で示す方針を明記して 5 点
- $0 < x_1 < 2$ を示して 3 点
- $0 < x_n < 2$ の仮定の下，$0 < x_{n+1} < 2$ となることを示して 7 点
- 数学的帰納法の結論に 2 点

(2) (配点 17 点)

- $\dfrac{2+x_{n+1}}{2-x_{n+1}}=\left(\dfrac{2+x_n}{2-x_n}\right)^2$ と変形して 5 点
- 数列$\left\{\log\dfrac{2+x_n}{2-x_n}\right\}$が公比 2 の等比数列となることを述べて 5 点
- 答えに 7 点

(3) (配点 16 点)

- $\dfrac{2+x_n}{2-x_n}$ を e を用いて表して 5 点
- x_n を e を用いて表して 6 点
- 答えに 5 点

第 6 問(50 点満点)

(1) (配点 16 点)

- 積和の公式を用いた式の変形に 5 点
- $\sin\dfrac{x}{a}-\sin x$ を正しく積分できて 5 点
- 答えに 6 点

(2) (配点 17 点)

- $\sin\dfrac{x}{a}=\sin x$ の一般解を求めて 7 点
- 上記の一般解のそれぞれの形で正で最小のものを求めて 5 点
- 答えに 5 点

(3) (配点 17 点)

- $\dfrac{f(\alpha)}{a}$ を求めて(解答解説③の式に) 4 点
- $\lim\limits_{a\to+0}\cos\dfrac{\alpha}{a}$ の値および $a\to+0$ のとき $\alpha\to+0$ を述べて 4 点
- $\lim\limits_{a\to+0}\dfrac{1-\cos\alpha}{2a}$ を求めて 6 点
- 答えに 3 点