2022 年度第 1 回東北大本番レベル模試

# 採点基準　数学

【共通事項】

1．約分の未了，根号内の整理不備は 1 点減点

2．分母の有理化の不備については減点なし

3．別解の配点は解答の配点に準ずる

【文系】(200 点満点)

第 1 問 (50 点満点)

(1) (配点 15 点)

- P の座標を$(p_1, p_2)$，三角形 OPQ の重心 G の座標を$(X, Y)$のようにおき，$X, Y$ をそれぞれ $p_1, p_2$ で表して（G の座標を P の座標を用いて表して）5 点
- 上記の $X, Y$ の満たす関係式を求めて 5 点
- 重心 G の動く図形を述べて 5 点

(2) (配点 35 点)

- $\mathrm{P}(p_1, p_2)$, $\mathrm{Q}(q_1, q_2)$のようにおいたとき，$\mathrm{G}(X, Y)$の $X, Y$ をそれぞれ $p_1, p_2, q_1, q_2$ で表して（G の座標を P, Q の座標を用いて表して）5 点
- Q を固定した下で P を円 $C$ の周上で動かしたときの点 G の軌跡を求めて 5 点
- 上記の軌跡の円の中心が Q を動かしたときに描く軌跡を求めて 5 点
- 三角形 OPQ の重心 G の存在する領域の説明に 10 点
- 図示に 10 点

第 2 問 (50 点満点)

(1) (配点 18 点)

- 選ぶ順序も区別したとき，3 個の点を選ぶ選び方が $12^3$ 通りあり，これらが同様に確からしいことを述べて 5 点
- 選んだ 3 点を結んで直角三角形になる条件を述べて 4 点
- 選ぶ順序も考えたときの直角三角形となる選び方を求めて 4 点
- 確率を求める計算と答えに 5 点

(2) (配点 15 点)

- 鋭角三角形を合同なもので分類し，それぞれの個数を述べて 7 点
- 確率を求める計算と答えに 8 点

(3) (配点 17 点)

- 鈍角三角形となる確率を求める方針に 7 点
- 確率を求める計算と答えに 10 点

第 3 問（50 点満点）

(1)（配点 27 点）

- $C_1$ 上の点を $(s,\ s^3-2s^2+s)$ のように設定し，この点における接線の方程式を求めて 5 点
- $C_2$ 上の点を $(t,\ t^2+2t+13)$ のように設定し，この点における接線の方程式を求めて 5 点
- 上記の 2 つの接線が一致する条件を求めて 5 点
- 上記の 2 つの接線が一致する $s$ の値を求めて 7 点($9s^2-14s+17=0$ が実数解をもたないことの言及がない場合は 6 点)
- 2 本の共通接線の方程式を求めて 5 点

(2)（配点 23 点）

- $C_2$ と共通接線との接点の座標，接線の方程式を明示して 6 点
- 2 つの接線の交点の $x$ 座標を求め，面積を求める領域を図などで説明して 5 点
- 面積を求める定積分の立式に 6 点
- 残りの計算と答えに 6 点

第 4 問（50 点満点）

(1)（配点 15 点）

- $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で表して 5 点
- $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ で表して 5 点
- 証明すべき式を導いて 5 点

(2)（配点 17 点）

- $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の半径と内積 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の関係を表す等式を立てて 5 点
- $\cos\alpha$ の値を求めて 3 点
- $\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\alpha}{2}$ など $\beta=\pi-\dfrac{\alpha}{2}$ となる根拠を述べて 2 点
- $\cos\beta$ の値を求めて 7 点

(3)（配点 18 点）

- $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ となる点 D を設定したとき $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\dfrac{7}{2}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ となることを述べて 5 点
- $\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{9}{8}S$ を導いて 5 点
- $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ となる点 E を設定したとき $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\dfrac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ となることを述べて 4 点
- 答えに 4 点

【理系】(300 点満点)

第 1 問（50 点満点）

(1) （配点 20 点）

- EF の長さを $x$ で表して 7 点
- $C_1$ の中心を I としたとき，$\triangle\mathrm{AFI}+\triangle\mathrm{AEI}+\triangle\mathrm{EFI}=\triangle\mathrm{AFE}$ であることを述べ, 左辺を $r$ と $x$ で, 右辺を $x$ で表して 7 点
- 答えに 6 点

(2) （配点 30 点）

- $r$ と $x$ を用いて $S$ を求める立式に 7 点
- $t=\sqrt{3x^2-3x+1}$ のようにおいたとき，$S$ を $t$ で表し，さらに平方完成して 7 点
- 上記の $t$ のとり得る値の範囲を述べて 4 点
- $S$ が最小値をとる $t$ の値を述べて 6 点
- 答えに 6 点

第 2 問（50 点満点）

(1) （配点 7 点）

- $p^k$ の正の約数の和を求め，大小関係を示して 7 点

(2) （配点 43 点）

- $x \geqq 2$ において，関数 $y=\dfrac{x}{x-1}=1+\dfrac{1}{x-1}$ が単調減少であることを述べて 5 点
- $n$ が 1 つの素因数からなるとき，題意の不等式を満たさないことを示して 5 点
- $n$ が 2 つの異なる素因数からなるとき，題意の不等式を満たさないことを示して 7 点
- $n$ が 3 つの異なる素因数からなるとき，題意の不等式を満たさないことを示して 14 点
- $n$ の異なる素因数が 3 つ以下のとき，$S(n) \leqq \dfrac{15}{4}n$ であることを述べて 5 点
- 対偶をとることにより証明を完結して 7 点

第 3 問（50 点満点）

(1) （配点 22 点）

- 空箱が 3 個のときの球の入れ方の数を求めて 5 点
- 空箱が 2 個のときの球の入れ方の数を求めて 5 点
- 空箱が 1 個のときの球の入れ方の数を求めて 5 点
- 空箱がないときの球の入れ方の数を求めて 5 点
- 答えに 2 点

(2) （配点 28 点）

- 空箱が 3 個のときの球の入れ方の数を求めて 3 点
- 空箱が 2 個のときの球の入れ方の数を求めて 7 点
- 空箱が 1 個のときの球の入れ方の数を求めて 6 点

- 空箱がないときの球の入れ方の数を求めて 7 点
- 答えに 5 点

第 4 問（50 点満点）

(1)（配点 10 点）

- $C$ と $D$ が異なる 2 点で交わる条件を不等式で表して 5 点
- 答えに 5 点

(2)（配点 40 点）

- 直線 $l$ の方程式を求めて 5 点
- $2y-1=0$ のとき，$(2y-1)t^2+2xt-1=0$ が $t>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ に解をもつ条件を求めて 5 点
- $2y-1 \fallingdotseq 0$ のとき，$(2y-1)t^2+2xt-1=0$ が $t<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ と $t>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ に 1 つずつ解をもつ条件を求めて 7 点
- $2y-1 \fallingdotseq 0$ のとき，$(2y-1)t^2+2xt-1=0$ が $t>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ に 2 つ解をもつ条件を求めて 8 点
- 含まれる境界が $y=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$ $(0<x<\sqrt{3})$ のみであることを明記して 5 点
- 図に 10 点

第 5 問（50 点満点）

(1)（配点 10 点）

- $\{a_n\}$ の漸化式を求め，さらに一般項を求められる形にまで変形して 5 点
- $\{a_n\}$ の一般項に 5 点

(2)（配点 15 点）

- 部分和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n$ を求めて 8 点
- 答えに 7 点

(3)（配点 25 点）

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} na_n=\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ を述べて 5 点
- 上記の部分和 $S_N=\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ を求めて 10 点
- 上記の部分和に対して $\displaystyle\lim_{N\to\infty} S_N$ を求めて 5 点
- 答えに 5 点

第 6 問（50 点満点）

(1) (配点 20 点)

- $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，$f(t)=\sin t$, $f(x-t)=\sin(x-t)$ を述べて 5 点
- $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，$g(x)$ を求めて 5 点
- $\pi \leqq x \leqq 2\pi$, $2\pi \leqq x$ のとき，$g(x)$ をそれぞれ求めて 10 点(各 5 点)

(2) (配点 15 点)

- $0 < x < \pi$ のとき，$g'(x) > 0$ を示して 2 点
- $\pi < x < 2\pi$ のとき，$g'(x) < 0$ を示して 3 点
- $2\pi < x$ のとき，$g'(x)=0$ を述べ，さらに上記と合わせ $g'(x)$ が $x=\pi$ でのみ正から負に変わることを述べて 5 点
- 答えに 5 点

(3) (配点 15 点)

- $\int_0^{2\pi} g(x)dx$ を(1)の結果をもとに三角関数を含んだ定積分の形で表して 5 点
- 不定積分 $\int x\cos x dx$ を求めて 5 点
- 答えに 5 点