第１回７月東北大本番レベル模試　（2019 年 7 月 7 日実施）

採点基準　数学（文科系・理科系）

【共通事項】

１．約分の未了，根号内の整理不備は１点減点

２．分母の有理化の不備については減点なし

３．別解の配点は解答の配点に準ずる

【文系】（200 点満点）

第１問（50 点満点）

(1)（配点 15 点）

- 内心を I としたとき，$\triangle$IBC, $\triangle$ICA, $\triangle$IAB それぞれの面積を与えられた長さで表して 9 点
- 答えに 6 点

(2)（配点 15 点）

- $\angle$A 内の傍接円の中心を $\mathrm{I_A}$ としたとき，$\triangle \mathrm{I_A CA}$, $\triangle \mathrm{I_A AB}$, $\triangle \mathrm{I_A BC}$ それぞれの面積を r_A と三角形の辺を用いて表して 7 点
- 答えに 8 点

(3)（配点 20 点）

- $\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r_\mathrm{A}}, \dfrac{1}{r_\mathrm{B}}, \dfrac{1}{r_\mathrm{C}}$ をそれぞれ S, a, b, c で表して 10 点
- 正しく証明できて 10 点

第２問（50 点満点）

(1)（配点 15 点）

- すべての取り出し方の総数を求めて 3 点
- $X=Y$ となる取り出し方の数を求めて 9 点
- 答えに 3 点

(2)（配点 20 点）

- 場合分けを行い，適する場合に対してそれぞれ何通りあるかを求めて 12 点(各 4 点)
- 不適である場合をすべて論述できて 4 点
- 答えに 4 点

(3)（配点 15 点）

- $(*)$ の下で 4 の倍数となる確率を求めて 4 点
- 条件付き確率を求める立式と答えに 11 点

第 3 問（50 点満点）

(1)（配点 10 点）

- C と l が異なる 2 点で交わることを 2 次方程式が異なる 2 つの解をもつことと言い換え，判別式が正となることの説明と立式に 7 点
- 答えに 3 点

(2)（配点 20 点）

- Q, R の x 座標を α, β のように表し，PQ, PR をそれぞれ a, α, β で表して 7 点
- 解と係数の関係から，上記の α, β に対して $\alpha+\beta, \alpha\beta$ を求めて 3 点
- 答えに 10 点

(3)（配点 20 点）

- a^2 についての平方完成の式変形を行って 5 点
- PQ・PR を最大とする a の値に 2 点
- 面積を上記の α, β に対して $(\beta-\alpha)^3$ で表して 6 点
- 上記の α, β に対して $(\beta-\alpha)^2$ を a で表して 2 点
- 答えに 5 点

第 4 問（50 点満点）

(1)（配点 25 点）

- CD : HD $=(1-s):s$ （sは実数）のようにおき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表して 5 点
- $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表して 3 点
- $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$ より s を t で表して 12 点（s の分母が 0 にならないことの確認がない場合は 10 点）
- 答えに 5 点

(2)（配点 25 点）

- t の範囲を述べて 5 点
- △OCD を t と △OAB で表して 6 点
- △OCD が最大となるときの t の値を求めて 7 点
- 途中の計算と答えに 7 点

【理系】（300 点満点）

第 1 問（50 点満点）

(1)（配点 15 点）

- $\mathrm{A}(\alpha,\,\alpha^2),\,\mathrm{B}(\beta,\,\beta^2)$ のように表し，2 本の接線の直交条件から，$\alpha\beta=-\dfrac{1}{4}$ を求めて 7 点
- 途中の考え方と答えに 8 点

(2)（配点 35 点）

- $\triangle\mathrm{APB}$ の外接円の中心座標を上記の $\alpha,\,\beta$ で表して 5 点
- 点 Q の y 座標を上記の $\alpha,\,\beta$ で表して 6 点
- 点 Q の軌跡を求めて（答えに）8 点
- 面積を上記の $\alpha,\,\beta$ で表して 8 点
- 途中の計算と答えに 8 点

第 2 問（50 点満点）

(1)（配点 25 点）

- すべての場合の数を求めて 5 点
- $n \geqq 3$ のとき，$X_n=18$ となる事象を排反な事象に分割して 5 点
- $n \geqq 3$ のときと $n=2$ のときに $X_n=18$ となる確率をそれぞれ求めて 10 点（各 5 点）
- 答えに 5 点

(2)（配点 25 点）

- X_n が 15 の倍数になる目の出方について説明できて 5 点
- 余事象で考える方針を立てて 5 点
- 余事象について，どのような事象かを記述できて 8 点
- 途中の計算と答えに 7 点

第 3 問（50 点満点）

(1)（配点 8 点）

- $a=gA,\,b=gB$ のようにおき，$L=gAB$ となる根拠を正しく説明できて 4 点
- 証明できて 4 点

(2)（配点 20 点）

- $a=5A,\,b=5B$ のようにおいたとき，$A,\,B$ の不定方程式を導いて 8 点
- 上記の不定方程式を満たす $A,\,B$ の値の組を求めて 7 点
- $A,\,B$ が互いに素なもので絞り，答えを求めて 5 点

(3)（配点 22 点）

- $3^3(n^3-n)=(3n+1)(9n^2-3n-8)+8$ を導けて 7 点
- a_n と b_n の最大公約数の最大値は 8 となることを示して 5 点
- $n=8k+5$ としたとき，a_n と b_n を k で表して 4 点
- L の最小値を求めて 3 点
- 答えに 3 点

第 4 問（50 点満点）

- 平面 α の方程式を $ax+by+cz+d=0$ のようにおき，通る点の条件から α の方程式を a, d, t で表して 10 点
- α の法線ベクトルを t を用いて表して 10 点
- T の座標を t で表して 6 点
- B から xy 平面に下ろした垂線の足を H としたとき，BT が最小になるのは，HT が最小になるときであることを述べて 5 点
- HT^2 の増減を調べ，$t=-1$ で最少であることを述べて 10 点
- BT を最小とする T の座標（答え）に 4 点
- BT の最小値（答え）に 5 点

第 5 問（50 点満点）

(1)（配点 15 点）

- $a=\alpha+\beta+\gamma$, $b=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $c=\alpha\beta\gamma$ のようにおき, 条件(I)より a, b, c がすべて実数であることを示して 8 点
- α, β, γ が実数係数の 3 次方程式の解であることを述べ，α, β, γ のうち少なくとも 1 つは実数となることを述べて 7 点

(2)（配点 35 点）

- $\alpha=-1$, $\beta=\cos\theta+i\sin\theta$, $\gamma=\cos\theta-i\sin\theta$ $(0<\theta<\pi)$ などと条件にあうように設定して 10 点
- 三角形 ABC の面積 $S(\theta)$ を θ で表して 8 点
- $S(\theta)$ の増減を調べ，$S(\theta)$ が最大となる θ を求めて 10 点
- 答えに 7 点

第 6 問（50 点満点）

(1)（配点 10 点）

- 面積，定積分の答えに 10 点(各 5 点)

(2)（配点 40 点）

- 球 B が動きうる部分の体積を，三角柱の底面から s $(0\leqq s\leqq 6)$ の距離にある平面との共通部分の面積から求めると考え，柱体部分の $1\leqq s\leqq 5$ と高さにより変化する $0\leqq s\leqq 1, 5\leqq s\leqq 6$ にわけて考える方針を立てて 5 点
- 柱体部分の $1\leqq s\leqq 5$ の平面との共通部分の面積を求めて 12 点
- 高さにより変化する $0\leqq s\leqq 1, 5\leqq s\leqq 6$ の部分の平面との共通部分の面積を t $(=1-s)$ で表して 15 点
- 途中の計算と答えに 8 点