2021年度第1回6月阪大本番レベル模試　採点基準

数学(理系)

1　空間図形・最大最小

問題

Oを原点とするxyz空間に4点A(1, 0, 0), B(1, 1, 0), C(0, 1, 0), D(0, 1, 1)をとり，aを$0<a\leqq 1$を満たす定数として，線分CB上にCE$=a$となる点Eをとる.

また，x軸の$x\geqq 0$の部分に動点Pをとり，θを

$$\theta=\angle \mathrm{PDE}$$

で定める．$t=$OP $(t\geqq 0)$として次の問いに答えよ.

(1) $\cos\theta$をtとaを用いて表せ.

(2) tが$t\geqq 0$で変化するとき，$\cos\theta$の最大値Mをaを用いて表せ.

(3) $\theta\geqq\dfrac{\pi}{6}$であることを示せ.

▶配点率　20%

▶出題のねらい

ベクトルの内積，あるいは余弦定理を用いて，$\cos\theta$の値から角θの大きさを調べる方法の定着度をみる.

また，

- 無理関数の微分を正確に実行できるか.
- 関数を設定する，差をとって符号一定の式を作る，などの不等式の証明法が使えるかどうか.

などもみる.

(合計 50点)

(1) 10点 (2) 22点 (3) 18点

▶解答

(1) θ の定義から，内積を用いると

$$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DP}=|\overrightarrow{DE}||\overrightarrow{DP}|\cos\theta \quad\cdots\cdots①$$

が成立する．

ここで，点D，EはD(0, 1, 1)，E(a, 1, 0)で与えられるので

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OD}=(a,\ 0,\ -1)$$

であり，OP$=t$ よりP(t, 0, 0)となるので，

$$\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OD}=(t,\ -1,\ -1)$$

が成立する．

よって，これらを①に用いると，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DP}}{|\overrightarrow{DE}||\overrightarrow{DP}|}$$

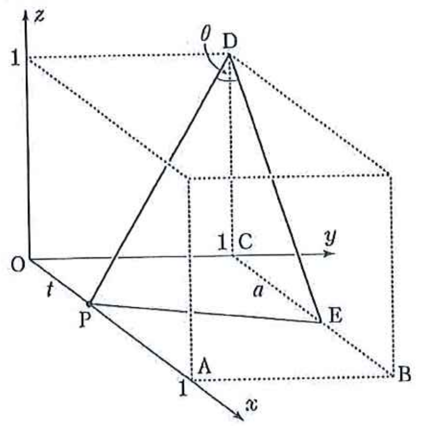
$$=\frac{at+1}{\sqrt{a^2+1}\sqrt{t^2+2}} \quad\cdots\cdots②(答)$$

である．

1) 内積の余弦定理を用いていると (5点)

2) cos θ を t, a のみで表せて． (分母の有理化不要) (5点)

10



(2) ②より

$$f(t)=\frac{at+1}{\sqrt{t^2+2}}=(at+1)(t^2+2)^{-\frac{1}{2}}$$

で $f(t)$ を定めれば，

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}f(t) \quad\cdots\cdots③$$

であり，$f(t)$ を微分すれば

$$f'(t)=a(t^2+2)^{-\frac{1}{2}}+(at+1)\left(-\frac{1}{2}\right)(t^2+2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2t$$

$$=(t^2+2)^{-\frac{3}{2}}\{a(t^2+2)-(at+1)t\}$$

$$=\frac{2a-t}{(\sqrt{t^2+2})^3}$$

が得られる．これより，$t\geqq 0$ での $f(t)$ の増減は

t	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$	(∞)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$f(2a)$	$\searrow$	(a)

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{a+\frac{1}{t}}{\sqrt{1+\frac{2}{t^2}}}=a$$

となり，$f(t)$ は $t=2a$ で最大値をとる．

よって，③から，$\cos\theta$ の最大値 M は

$$M=\frac{f(2a)}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{2a^2+1}}{2\sqrt{a^2+1}} \quad\cdots\cdots(答)$$

となる．

3) 正しい微分に． (7点)

4) 導関数の符号変化が追える形にして (f'(t)=0 ⟺ t=2a だけではこの点なし) (5点)

5) 増減表に (t=0, +∞は無視) (グラフ etc の同等なものなら OK) (5点)

6) M を a で表して (5点)

35

(3) 18点

(3) $\cos\theta$ の最大値 M と $\cos\dfrac{\pi}{6}$ の大小を比較する.

(2)より,

$$\cos\frac{\pi}{6}-M=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}\sqrt{2a^2+1}}{2\sqrt{a^2+1}}$$

7) 差を考えていると (5点)

$$=\frac{\sqrt{3}\sqrt{a^2+1}-\sqrt{2}\sqrt{2a^2+1}}{2\sqrt{a^2+1}}$$
$$=\frac{\sqrt{3a^2+3}-\sqrt{4a^2+2}}{2\sqrt{a^2+1}}$$
$$=\frac{1-a^2}{2(\sqrt{3a^2+3}+\sqrt{4a^2+2})\sqrt{a^2+1}}\geqq 0$$

($\because$ $0<a\leqq 1$)

8) 証明となる正しい式変形に (分子の有理化があると, 5点を与える) (10点)

となり, M が $\cos\theta$ の最大値であることと合わせ

$$\cos\theta\leqq M\leqq\cos\frac{\pi}{6} \quad \cdots\cdots④$$

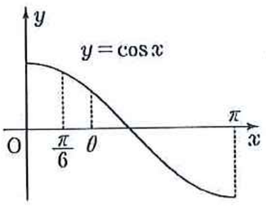
が成立する.

一方, $0\leqq x\leqq\pi$ において, $\cos x$ が単調に減少することから, ④は

$$\theta\geqq\frac{\pi}{6}$$

の成立を示している.

(証明終)



9) 残りの説明に (3点)

▶解説

全体として，標準的な内容がいくつか組み合わさっている問題であり，誘導に従えば，正解を導くのにそれほどの困難はないだろう．

(1)，(2)については，問題で要求された立式，計算を実行すればよいだけだが，$\cos\theta$ を t で表現するためには，

ベクトルの内積，または余弦定理

が必要であり，さらに，最大値を求めるには，無理関数の正確な微分が必要である．

(3)では，「角の大小」を「三角関数の値の大小」に言い換えて不等式を証明する必要がある．この場合の不等式の証明には標準的な方法である

「差をとって，その符号を調べる」

を利用することができる．もちろん関数を設定して，微分してもよい．

このとき，$\cos x$ が $0 \leqq x \leqq \pi$ で単調に減少するので，

$$\theta \geqq \frac{\pi}{6} \iff \cos\theta \leqq \cos\frac{\pi}{6}$$

となることに注意がいる．

1° (1)では余弦定理を用いてもよい．

△PDE において，$\theta = \angle\mathrm{PDE}$ より

$$\mathrm{PE}^2 = \mathrm{DP}^2 + \mathrm{DE}^2 - 2\,\mathrm{DP}\cdot\mathrm{DE}\cos\theta$$

が成立し，これより

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{DP}^2+\mathrm{DE}^2-\mathrm{PE}^2}{2\,\mathrm{DP}\cdot\mathrm{DE}} = \frac{(t^2+2)+(a^2+1)-\{(t-a)^2+1\}}{2\sqrt{t^2+2}\sqrt{a^2+1}} = \frac{at+1}{\sqrt{a^2+1}\sqrt{t^2+2}}$$

となる．

(1) 10点

1) 内積,余弦定理を用いている. 5点

2) a,t で表して 5点

**2°　解答の(3)では，$\sqrt{\ }$ を含む式である

$M=\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{2a^2+1}}{2\sqrt{a^2+1}}$ と $\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の大小を判定する必要があるので，$\sqrt{\ }$ がある場合の定石の手法である

「差をとって，分子の有理化をする」

を用いている．具体的には

$$\sqrt{A}-\sqrt{B}=\frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$$

という変形を，$\cos\dfrac{\pi}{6}-M$ に用いている．もちろん，次のように関数を設定して，増減を調べてもよい．

$a^2=x$ とすれば，

$$M^2=\frac{2x+1}{2(x+1)} \qquad \cdots\cdots⑤$$

となるので，x の関数

$$g(x)=\frac{2x+1}{2(x+1)} \quad (0<x\leqq 1)$$

の増減を調べてもよい．

$$g'(x)=\frac{1}{2(x+1)^2}>0$$

であるので，$g(x)$ は単調に増加し，その最大値は

$$g(1)=\frac{3}{4}$$

となる．よって，⑤から

$$M^2\leqq g(1)=\frac{3}{4}$$

が成立し，これより

$$M\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}$$

を結論することができる．

実は，$g(x)$ が分母と分子が 1 次の分数関数なので，微分するまでもなく，次のような変形を用いることで単調性がわかる．

$$g(x)=\frac{2x+1}{2(x+1)}=1-\frac{1}{2(x+1)}$$

これより，$g(x)$ が $0<x\leqq 1$ において単調に増加することを結論できる．

この式変形は，分数式に対しよく用いるものである．

(3)　15点

9) 関数を設定して　7点

10) 正しい微分 or $g(x)=1-\dfrac{1}{2(x+1)}$ に　4点

11) 残りの証明に　4点

2 数列・複素数

問題

複素数 a $(a \neq 0)$ と複素数 b に対し，x の1次式 $f(x)$ を

$$f(x)=ax+b$$

で定め，$f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$，…を

$$f_1(x)=f(x),$$
$$f_{n+1}(x)=f(f_n(x)) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める．

(1) $f_4(x)$ を求めよ．

(2) 3以上の自然数 n が与えられたとき，

$$f_n(x)=a(x+1)$$

が x の恒等式となるような複素数の組 $(a,\ b)$ は何組あるか．

▶配点率 20%

▶出題のねらい

「具体的な実験から，結論を予想し，変数を用いて，その予想に一般的な証明を与える.」という入試に不可欠な手法の定着状況をみる．さらに，

- 等比数列の和の公式を場合分けして使えるか否か．
- 1の n 乗根(解答では $(n-1)$ 乗根)の公式を使えるか否か．

等もみる．

▶解答

(1) $f_1(x)=ax+b$ であるので，$f_2(x)$ の定義から

$$f_2(x)=f(f_1(x))=f(ax+b)=a(ax+b)+b$$
$$=a^2x+(a+1)b$$

であり，同様に，$f_3(x)$，$f_4(x)$ の定義から

$$f_3(x)=f(f_2(x))=f(a^2x+(a+1)b)$$
$$=a\{a^2x+(a+1)b\}+b$$
$$=a^3x+(a^2+a+1)b$$
$$f_4(x)=f(f_3(x))=f(a^3x+(a^2+a+1)b)$$
$$=a\{a^3x+(a^2+a+1)b\}+b$$
$$=a^4x+(a^3+a^2+a+1)b \quad \cdots\cdots(答)$$

が得られる．

合計 50点

(1) 12点 (2) 38点

(1) 12点

1) $f_2(x)$ を求めて　4点

2) $f_3(x)$ を求めて　4点

3) $f_4(x)$ を求めて.　4点

・1次式の形，$\square x+\square$ になっていなくてもよい

1)，2) は 3) のための途中点とする．不可分

(2) 38点

(2) まず，n に関する数学的帰納法により，

$$f_n(x)=a^n x+b\sum_{k=1}^{n}a^{k-1} \quad \cdots\cdots(*)$$

が，任意の自然数 n で成立することを示す．

―4) 一般形を予想できていると　6.5点

―5) 帰納法の方針に　4.5点

[I]　$n=1$ のとき

(*)の左辺は

$$f_1(x)=f(x)=ax+b$$

であり，$a^0=1$ を用いると，(*)の右辺は

$$a^1x+b\sum_{k=1}^{1}a^{k-1}=ax+b\cdot a^0=ax+b$$

となる．これらは，(*)の $n=1$ での成立を示している．

[II]　N を自然数として，(*)の $n=N$ での成立を仮定すれば

$$f_N(x)=a^N x+b\sum_{k=1}^{N}a^{k-1} \quad \cdots\cdots①$$

が成立することになり，①を $f_{N+1}(x)$ の定義に用いて

$$f_{N+1}(x)=f(f_N(x))=f\left(a^N+b\sum_{k=1}^{N}a^{k-1}\right)$$

$$=a\left(a^N x+b\sum_{k=1}^{N}a^{k-1}\right)+b$$

$$=\boxed{a^{N+1}x+b\left(\sum_{k=1}^{N}a^k+1\right)}$$

$$=\boxed{a^{N+1}x+b\sum_{k=1}^{N+1}a^{k-1}}$$

6) $n=k$ の場合から $n=k+1$ の場合を明確に導いて　4.5点
（結論を「つないだ」疑念の残るものは 2点のみ）

が得られる．これは，(*)の $n=N+1$ での成立を示している．

[I]，[II]より(*)は任意の自然数 n で成立する．

したがって，3以上の自然数 n が与えられたとき，(*)より，

$$f_n(x)=a(x+1)$$

$$\iff a^n x+b\sum_{k=1}^{n}a^{k-1}=a(x+1) \quad \cdots\cdots②$$

となるが，②が x の恒等式である条件は，両辺の係数を比べて

$$a^n=a,\quad b\sum_{k=1}^{n}a^{k-1}=a \quad \cdots\cdots③$$

で与えられる．

7) この a, b の方程式を得て　4.5点

↑18

(i) $a \neq 1$ のとき

等比数列の和の公式が使え，$a \neq 0$ も用いると

$$③ \iff a^n = a,\ \frac{b(a^n-1)}{a-1} = a$$

$$\iff a^{n-1} = 1,\ b = a \quad \cdots\cdots ④$$

となる．④において ω を

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{n-1} + i\sin\frac{2\pi}{n-1}$$

で定めれば，$n-1 \geqq 2$，$a \neq 1$ より

$$a^{n-1} = 1 \iff a = \omega,\ \omega^2,\ \cdots,\ \omega^{n-2}$$

が成立し，

$$④ \iff a = b = \omega,\ \omega^2,\ \cdots,\ \omega^{n-2}$$

となる．したがって，③を満たす $(a,\ b)$ は $(n-2)$ 組ある．

(ii) $a = 1$ のとき

③は

$$1 = 1,\ nb = 1$$

となり，③を満たすのは，$(a,\ b) = \left(1,\ \frac{1}{n}\right)$ の1組である．

(i)，(ii)より，求める $(a,\ b)$ の組の個数は

$$(n-2)+1 = n-1\ (\text{組}) \quad \cdots\cdots (\text{答})$$

となる．

8) $a \neq 1$, $a=1$ の場合分けに気づいているようだて　5点

9) この同値変形に　3点

10) $a \neq 1$ の場合のこの解に　6点

11) $a=1$ の場合のこの解に　3点

12) $n-1$ を得て．　3点

20

8

▶解説

(1)は $f_1(x)=ax+b$ を

$$f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$$

で $n=1,\ 2,\ 3$ とおいた式

$$f_2(x)=f(f_1(x)),\quad f_3(x)=f(f_2(x)),$$
$$f_4(x)=f(f_3(x))$$

に順次代入していくだけなので問題はないだろう．

(2)では，(1)の結果から容易に $f_n(x)$ の形が類推できるので帰納法で一般的に証明することになる．

さらに，$f_n(x)=a(x+1)$ を係数 a，b の連立方程式とみて，1 の n 乗根(解答では $(n-1)$ 乗根)の公式を利用すれば条件を満たす $(a,\ b)$ の組の個数がわかる．

1° 解答の(2)では $f_n(x)$ を Σ を用いて表した上で，数学的帰納法を用いているが，もちろん，Σ を用いることなく

$$f_n(x)=a^nx+(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1)b \quad \cdots(*)$$

の形で数学的帰納法を適用してもよい．[Ⅱ]のみ示せば次のようになる．

[Ⅱ] (*)の $n=k$ での成立を仮定すれば

$$f_k(x)=a^kx+(a^{k-1}+a^{k-2}+\cdots+a+1)b$$

が成立することになるが，これを $f_{k+1}(x)$ の定義に用いると

$$\begin{aligned}f_{k+1}(x)&=f(f_k(x))\\&=f(a^kx+(a^{k-1}+a^{k-2}+\cdots+a+1)b)\\&=a\{a^kx+(a^{k-1}+a^{k-2}+\cdots+a+1)b\}+b\\&=a^{k+1}x+(a^k+a^{k-1}+\cdots+a+1)b\end{aligned}$$

となり，これは，(*)の $n=k+1$ での成立を示している．

こちらの方が分かりやすいかもしれない．

2° 漸化式を用いて $f_n(x)$ を求めることもできるが，次のような注意点がある．

- $f_1(x)$，$f_2(x)$，…のすべてが x の1次以下の式であることを示して初めて
$$f_n(x)=p_nx+q_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
とおけること．
- 得られる漸化式が a，b を含んだ
$$q_{n+1}=aq_n+b$$
の形になるので，a の値により場合分けが必要になること．

の2点である．この2点を踏まえ，次のように記述すればよい．記述は少し長くなる．

$f_1(x)=ax+b$ は x の1次式であり，$f_n(x)$ が x の1次式であるとすれば，$a\neq0$ と

$$f_{n+1}(x)=f(f_n(x))=af_n(x)+b$$

より $f_{n+1}(x)$ は x の1次式になる．

したがって，数学的帰納法により，

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \cdots$$

はすべて x の1次式になり，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，p_n，q_n を係数として

$$f_n(x)=p_nx+q_n$$

とおくことができる．このとき

$$f_{n+1}(x)=p_{n+1}x+q_{n+1} \quad \cdots\cdots⑤$$

であり，さらに，定義から

(2) 38点

(3) $f_n(x)$ が1次以下の式であることの証明に．

45

$$f_{n+1}(x)=f(f_n(x))=f(p_nx+q_n)$$
$$=a(p_nx+q_n)+b$$

となるので，⑤と係数を比較して

$$p_{n+1}=ap_n \quad \cdots\cdots⑥$$
$$q_{n+1}=aq_n+b \quad \cdots\cdots⑦$$

が成立する．また，$f_1(x)=ax+b$ より

$$p_1=a,\ q_1=b$$

である．まず，上式と⑥より

$$p_n=a^{n-1}p_1=a^n$$

が得られる．さらに，

(i) $a\neq 1$ のとき

$$\alpha=a\alpha+b\left(\Longleftrightarrow \alpha=\frac{b}{1-a}\right) \quad \cdots\cdots⑧$$

なる α を用いて，⑦−⑧を作れば

$$q_{n+1}-\alpha=a(q_n-\alpha)$$

となるので，等比数列の公式が使え，これより

$$q_n-\alpha=a^{n-1}(q_1-\alpha)$$
$$\Longleftrightarrow q_n=\frac{a^nb}{a-1}-\frac{b}{a-1} \quad \left(\because \alpha=\frac{b}{1-a}\right)$$
$$\Longleftrightarrow q_n=\frac{b(a^n-1)}{a-1}$$

が得られる．したがって，$f_n(x)$ は

$$f_n(x)=a^nx+\frac{b(a^n-1)}{a-1}$$

となる．

(ii) $a=1$ のとき

⑦は $q_{n+1}=q_n+b$ となり，等差数列の公式が使え

$$q_n=q_1+(n-1)b=nb$$

が得られる．これと $p_n=a^n=1$ より

$$f_n(x)=x+nb$$

となる．したがって

$$f_n(x)=\begin{cases}a^nx+\dfrac{b(a^n-1)}{a-1} & (a\neq 1)\\ x+nb & (a=1)\end{cases}$$

となる．これ以降は，解答と同じなので，省略する．

このような漸化式を用いる解法が必要な問題は色々とあるので，十分に研究しておいてほしい．

14) 連立漸化式に　　4点

15) $a\neq1$, $a=0$ の場合分けに気づいて　　5点

$a\neq1$ の場合の
16) 定数項 q_n の一般項を求めて　　10点

17) $a=1$ の場合の q_n に　　3点

$\left(a=a^n,\ b=\dfrac{b(a^n-1)}{a-1}\right.$ として導出した$\Big)$

18) $a^{n-1}=1$, $b=a$ に　　3点

19) $a=b=\omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-2}$ に　　6点

20) $(n-2)+1=n-1$ を得て　　3点

3° (2)の後半で，1の m 乗根に関する次の公式を用いた．

> m が自然数であるとき，$z^m=1$ を満たす複素数 z は m 個あり
>
> $z^m=1 \iff z=1,\ \omega,\ \cdots,\ \omega^{m-1}$
>
> が成立する．ただし，
>
> $$\omega=\cos\frac{2\pi}{m}+i\sin\frac{2\pi}{m}$$
>
> とする．

解答では $m=n-1$ として，$a^{n-1}=1$ に用いている．

$n \geqq 3$ の場合，

$$\omega=\cos\frac{2\pi}{n-1}+i\sin\frac{2\pi}{n-1}$$

として，通常なら

$a^{n-1}=1 \iff a=1,\ \omega,\ \omega^2,\ \cdots,\ \omega^{n-2}$

として，$(n-1)$ 個の a が決まるのだが，**解答**の(i)では $a \fallingdotseq 1$ と仮定しているので

$a^{n-1}=1 \iff a=\omega,\ \omega^2,\ \cdots,\ \omega^{n-2}$

としている．

3 整数と不等式

問題

$a \geqq b \geqq c \geqq 1$ を満たす整数 a, b, c に対し,

$$p=\frac{2c-1}{a},\quad q=\frac{2a+1}{b},\quad r=\frac{b+1}{c+3}$$

で実数 p, q, r を定める.

(1) p が整数であるならば, $p=1$ であることを示せ.

(2) p, q, r のすべてが整数となるような整数の組 (a, b, c) をすべて求めよ.

▶**配点率　20%**

▶**出題のねらい**

方程式, 不等式の整数解を求める場合の基本的な手法である,

- 大小関係を用いて大きさを評価することで, 整数の範囲を限定する.
- 整数値が「幅1でトビトビにある」ことを用いて整数の値を絞り込み, すべての場合をチェックして解を決定する.

がどの程度定着しているかをみる.

また, 等式の基本的な運用法である「1変数の消去」が実践できているか否かもみる.

▶**解答**

仮定より, a, b, c は整数で

$a \geqq b \geqq c \geqq 1$ ……①

を満たし, 実数 p, q, r は

$$p=\frac{2c-1}{a} \quad \cdots\cdots ②$$

$$q=\frac{2a+1}{b} \quad \cdots\cdots ③$$

$$r=\frac{b+1}{c+3} \quad \cdots\cdots ④$$

により定められている.

(1) ①より $a \geqq c \geqq 1$ であり, ②に用いると

$$p=\frac{2c-1}{a} \geqq \frac{2\cdot1-1}{a}=\frac{1}{a}>0$$

が成立し, 同様に

$$p=\frac{2c-1}{a} \leqq \frac{2a-1}{a}=2-\frac{1}{a}<2$$

も成立する. したがって,

$0<p<2$

であるが, p が整数であるので, 上式より

$p=1$

が結論できる. これは, 題意の成立を示す.

(証明終)

合計 50点

(1) 10点　(2) 40点

(1) 10点

1) $a \geqq b \geqq c \geqq 1$ を用いて p を上と下から評価していると　5点

(一方のみは 3点)

2) $p=1$ を正しく導いて.　5点

(2) 40点

(2) p, q, r がすべて整数であるとき，(1)より $p=1$ であるから，②は

$$1=\frac{2c-1}{a} \qquad \therefore\ a=2c-1 \qquad \cdots\cdots⑤$$

3) $p=1$ を②に用いて. 4.5点

となる．これを，③に用いて a を消去すれば

$$q=\frac{2a+1}{b}=\frac{4c-1}{b} \qquad \cdots\cdots⑥$$

が得られ，$b \geqq c \geqq 1$ であるので，(1)と同様にして

$$q \geqq \frac{4\cdot 1-1}{b}=\frac{3}{b}>0$$

$$q \leqq \frac{4b-1}{b}=4-\frac{1}{b}<4$$

4) ①を用いて q を上と下から評価していると. 4.5点

となる．これより

$$0<q<4$$

であるが，q は整数であるので，上式より

$$q=1,\ 2,\ 3$$

が結論できる．

5) 必要条件で q の値の範囲を限定できて. 4.5点

(i) $q=1$ のとき，⑥より

$$1=\frac{4c-1}{b} \qquad \therefore\ b=4c-1$$

となるが，⑤より $a=2c-1$ であるので，これは $a \geqq b$ に反する．

(ii) $q=2$ のとき，⑥より

$$2=\frac{4c-1}{b} \qquad \therefore\ b=\frac{4c-1}{2}=2c-\frac{1}{2}$$

となるが，これは b, c が整数であることに反する．

6) $q=3$ 以外が不適当であることの証明に. [2°) の14)の方法も可能] 6.5点

(iii) $q=3$ のとき，⑥より

$$3=\frac{4c-1}{b} \qquad \therefore\ b=\frac{4c-1}{3} \qquad \cdots\cdots⑦$$

7) $q=3$ を③に用いて. 4.5点

が成立する．これを④に用いると，

$$r=\frac{b+1}{c+3}=\frac{\frac{4c-1}{3}+1}{c+3}=\frac{4c+2}{3(c+3)}$$

$$=\frac{4}{3}-\frac{10}{3(c+3)} \qquad \cdots\cdots⑧$$

8) r を1変数で表す. ($r=\frac{4b+4}{3b+13}$ も可) 4.5点

となり，両辺に 3 をかけて

$$⑧ \iff 3r=4-\frac{10}{c+3}$$

$$\iff \frac{10}{c+3}=4-3r \quad (\text{整数})$$

9) この変形に ($3r=4-\frac{40}{3b+13}$ でもOK) 15)を参照. 6.5点

が得られる．よって，$c+3$ は 10 の 4 以上の約数であり，

$$c+3=5,\ 10 \qquad \therefore\ c=2,\ 7$$

が必要である．

ア．$c=2$ のとき

⑦より $b=\frac{4c-1}{3}=\frac{7}{3}$ となり，b が整数であることに反する．

イ．$c=7$ のとき

⑤，⑦，(1)，仮定，⑧から

$$a=13,\ b=9,\ p=1,\ q=3,\ r=1$$

となり，a, b, p, q, r は自然数で，①も成立している．

10) 残りの正しい議論に. (16)を参照) 6.5点

以上より，求める自然数の組は，

$$(a,\ b,\ c)=(13,\ 9,\ 7) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

11) $(a,b,c)=(13,9,7)$ に 2.5点

▶**解説**

整数の範囲を限定することで整数値をいくつか決定し，そのすべての場合について可能性をチェックしていく問題である．

$a \geqq b \geqq c \geqq 1$ より，a，b，c はこの順に大，中，小となっており，この視点でみると，整数 p は

$$p=\frac{2c-1}{a}=\frac{2\cdot(\text{小})-1}{(\text{大})}$$

の形であり，p の値が余り大きくなく，その値を限定できることは予想がつくと思う．

実際に解答のように $a \geqq c \geqq 1$ を用いて

$$p=1$$

を結論できる．

この結果から等式 $1=\dfrac{2c-1}{a}$ が得られるが，これに用いるのは一般的な方針である

「等式を用いて１変数を消去する」

である．解答では，(2)で $a=2c-1$ として，

$q=\dfrac{2a+1}{b}$ から a を消去し，(1)と同様の操作を行っている．

式の運用方法等がわからないとき，この方針を実行することで，解法の糸口を発見できることが少なくないので，記憶しておくとよい．

1° (1)では背理法を用いることもできる．

$p \geqq 2$ と仮定する．②は

$$② \iff a=\frac{2c-1}{p}$$

であり，これを $a \geqq b$ に用いると

$$\frac{2c-1}{p} \geqq b \iff 2c \geqq pb+1$$

であり，これに $p \geqq 2$ を用いると，

$$2c \geqq pb+1 \geqq 2b+1$$

となる．これは $b \geqq c$ であることに反する．

よって，$p<2$ が成立し，$p=\dfrac{2c-1}{a}>0$ と合わせれば

$$0<p<2$$

となり，$p=1$ が結論できる．

2° (2)では，③から a を消去して得られる $q=\dfrac{4c-1}{b}$ と①から，(1)と同様にして $0<q<4$ を導き，$q=1$，2，3 の場合をそれぞれ吟味している．

しかし，③のままで，(1)と同様な評価を実行した場合には，$a \geqq b$ より

$$q=\frac{2a+1}{b} \geqq \frac{2b+1}{b}=2+\frac{1}{b}$$

となり，整数 q について $q \geqq 3$ を得ることができる．

よって，$0<q<4$ と合わせれば

$$q=3$$

が結論でき，(2)の(i)，(ii)の議論は不要になる．

(1) 10点

12) $p \geqq 2$ と仮定していると．　(5点)

13) $p=1$ を正しく導いて　(5点)

(2) (別方法)

6) $q=3$ 以外がダメな証明に　(6点)

14

3° (2)の後半では，整数解を求めるための，分数式に対する定石的な式変形

$$\frac{(分子)}{(分母)}=(商)+\frac{(余り)}{(分母)}$$

を用いている．実際，$(4c+2)\div(3c+9)$ を実行して，

商 $\frac{4}{3}$ と余り -10 を求め

$$r=\frac{4c+2}{3c+9}=\frac{4}{3}+\frac{-10}{3c+9}$$

のように変形している．

さらに，この後，(1つの分数)＝(整数)の形，つまり

$$\frac{10}{c+3}=4-3r \quad (整数) \qquad \cdots\cdots⑨$$

に変形し，$c+3$ が10の4以上の約数となることから，必要条件として，

$$c+3=5,\ 10 \qquad \therefore\ c=2,\ 7$$

を導いている．

ただし，このままでは⑨の r が自然数になることが示されていないので，$c=2,\ 7$ に対し，r が実際に自然数となるかどうかのチェックを実行し，最終的に $c=7$ を結論しなければならない．

このような手順は，整数解を求める場合にしばしば用いるものであるため，明確に頭に入れておきたい．

4° $r=\frac{4c+2}{3c+9}$ については，分母を払い，次の式変形を利用することもできる．

$axy+bx+cy+d=0$ $\Longleftrightarrow\ ax\cdot ay+b\cdot ax+c\cdot ay=-ad$ $\Longleftrightarrow\ (ax+c)(ay+b)=-ad+bc$

(2)でこの式変形を利用する場合には，次のようになる．

(2) 別方法

$$r=\frac{4c+2}{3c+9} \Longleftrightarrow 3cr+9r-4c=2$$

$$\Longleftrightarrow 3c\cdot3r+9\cdot3r-4\cdot3c=6$$

$$\Longleftrightarrow (3c+9)(3r-4)=6-36$$

$$\Longleftrightarrow (c+3)(3r-4)=-10$$

9) この変形に．(9)の点を与える) ⑥5点

$$\Longleftrightarrow (c+3,\ 3r-4)=(10,\ -1),\ (5,\ -2) \quad (\because\ c+3\geqq4)$$

$$\Longleftrightarrow (c,\ r)=(7,\ 1),\ \left(2,\ \frac{2}{3}\right)$$

10) 残りの正しい議論に (10)の点を与える) ⑥5点

であり，これより，$(c,\ r)=(7,\ 1)$ が得られる．

4 場合の数と確率

問題

n を 3 以上の整数とする．次の問いに答えよ．

(1) 赤球 2 個，黒球 n 個を 1 列に並べるとき，2 つの赤球が隣り合う順列の総数を N_1 とし，2 つの赤球が隣り合わない順列の総数を N_2 とする．N_1，N_2 を n の式で表せ．

ただし，同色の球は区別しないものとする．

(2) 白球 2 個，赤球 2 個，黒球 n 個を無作為に 1 列に並べるとき，どの白球も赤球と隣り合わない確率を n の式で表せ．

▶配点率 20%

▶出題のねらい

条件を満たす順列を，段階的に構成していき，積の法則，和の法則で場合の数を計算する方法(「構成的な数え上げ」という)の習熟度をみる．

さらに，実験から場合分けの必要性を発見できるか否かもみる．

(合計 50点)

(1) 14点　(2) 36点

▶解答

以下では，●，△，○のそれぞれで黒球，赤球，白球を表す．

(1) 14点

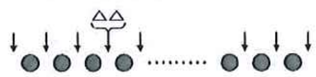
(1) 赤球 2 個，黒球 n 個を並べるとき，2 つの赤球が隣り合う順列は，次の手順により，重複なくすべて生成することができる．

step1. n 個の黒球を 1 列に並べる．

1 (通り)

step2. step1 の各順列に対し，図の $n+1$ 個の ↓ から 1 つ選び，その位置に赤球 $\boxed{\triangle\triangle}$ をおく．step2 の場合の数は

${}_{n-1}C_1$ (通り)



1) 説明 (簡単なものでよいが，式だけだと点なし．図でも可)　3点

したがって，

$N_1 = 1\cdot{}_{n-1}C_1 = n+1$ (通り)　……(答)　2) 結果　4点

となる．

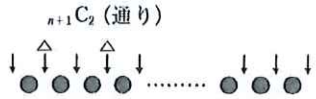
また，2 つの赤球が隣り合うことのない順列は次の手順により，重複なくすべて生成することができる．

step1. n 個の黒球を 1 列に並べる．

1 (通り)

step2. step1 の各順列に対し，図の $n+1$ 個の ↓ から 2 つ選び，その位置にそれぞれ赤球△を置く．step2 の場合の数は

${}_{n+1}C_2$ (通り)



3) 説明 (簡単なものでより，式だけは点なし，図も可)　3点

したがって，

$N_2 = 1\cdot{}_{n-1}C_2 = \frac{1}{2}n(n+1)$ (通り)　……(答)　4) 結果　4点

となる．

14

(2) 36点

(2) まず，白球2個，赤球2個，黒球 n 個の順列の総数 N を求める．

1	2							$n+3$	$n+4$

1列に並んだ $n+4$ 個の位置から白球2個，赤球2個の入る位置を選び，残りの位置に黒球 n 個を置く方法を考えて，N は

$$N={}_{n+4}C_2\cdot{}_{n+2}C_2\cdot 1$$

$$=\frac{1}{4}(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)\qquad\cdots\cdots①$$

5) 全体の数に
[どこかにあれば
OK]
4点

で与えられる．次に，上の N 個の順列のうち

「どの白球も赤球と隣り合わない」 ……(*)

を満たすものの総数 m を，赤球2個が隣り合っている場合と，そうでない場合に分けて求める．

6点

(i) 2つの赤球が隣り合うとき

6) この場合分けに気づいているようだと．

この場合の(*)を満たす順列は次の手順で，重複なくすべて生成できる．

step1. 2個の赤球と n 個の黒球を赤球が隣り合うように並べる．

この並べ方の数は(1)の N_1 に一致し，

$n+1$ (通り)

step2. step1の各順列に対し，どの赤球とも隣り合わないように，2つの白球を置く．

↓で赤球と隣り合わないように白球を置ける位置を示せば，その位置はstep1のいずれの順列に対しても n 通りある．

7) 説明
(簡単なものでOK. 図も可
式だけは，この点なし)
3点

△ △ ↓●↓●↓●↓●↓●↓ ……… ↓●↓●↓

↓●↓●↓ △ △ ↓●↓●↓●↓ ……… ↓●↓●↓

8) この2つをどこかで考えていると
6点

したがって，n 個の↓から1つ選んで $\boxed{○○}$ を置く方法と，2つ選んでそれぞれに○を置く方法を考え，step2の場合の数は

${}_nC_1+{}_nC_2$ (通り)

以上から，(i)の場合の数は

$$(n+1)\cdot({}_nC_1+{}_nC_2)=(n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)^2\ (\text{通り})$$

9) この結果に
(確率
6点

である．

(ii) 2つの赤球が隣り合わないとき

この場合の(*)を満たす順列は次の手順で，重複なくすべて生成できる．

step1. 2個の赤球と n 個の黒球を，赤球が隣り合わないように並べる．この並べ方の数は(1)の N_2 に一致し

$\frac{1}{2}n(n+1)$ (通り)

10) 説明
(式だけならこの点なし，簡単なものでOK. 図も可)
3点

step2. step1 の各順列に対し，どの赤球とも隣り合わないように，2つの白球を置く．

↓で赤球と隣り合わないように白球を置ける位置を示せば，その位置は step1 のいずれの順列に対しても $(n-1)$ 通りある．

△ ●↓● △ ●↓●↓●↓ ……… ●↓●↓

↓● △ ●↓●↓● △ ●↓ ……… ●↓●↓

したがって，$(n-1)$ 個の↓から1つ選んで $\boxed{\text{○○}}$ を置く方法と，2つ選んでそれぞれに○を置く方法を考え，step2 の場合の数は

$${}_{n-1}\mathrm{C}_1+{}_{n-1}\mathrm{C}_2\ (\text{通り})$$

この2つを書いていると，8)の点を与える
[8)で既に与えているときには
ここでは与えない]

以上から，(ii)の場合の数は

$$\frac{1}{2}n(n+1)\cdot({}_{n-1}\mathrm{C}_1+{}_{n-1}\mathrm{C}_2)$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n-1)$$

$$=\frac{1}{4}n^2(n+1)(n-1)\ (\text{通り})$$

11) この結果に
[確率 も可]

6点

となる．

(i)，(ii)から(＊)を満たす順列の総数 m は

$$m=\frac{1}{2}n(n+1)^2+\frac{1}{4}n^2(n+1)(n-1)$$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n+2) \qquad \cdots\cdots②$$

となる．

求める確率は $\dfrac{m}{N}$ で与えられ，①，②より

$$\frac{m}{N}=\frac{\frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n+2)}{\frac{1}{4}(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}$$

$$=\frac{n(n^2+n+2)}{(n+4)(n+3)(n+2)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

12) この結果に

2点

36

となる．

/8

▶**解説**

目標とする順列，組合せを段階的に構成していき，積の法則・和の法則で場合の数を決定するという，オーソドックスな手法を用いる数え上げの問題である．

そのため各段階では十分な実験で確認しながら，場合の数を決定することが重要であり，実験により，(2)の場合分け(i)，(ii)が必要であることを発見できる．

なお，**解答**では各段階を step1，step2 で示している．

1° 本間で中心となるのは，「隣り合わない」という条件であるので．

1. 「隣り合わない」とその余事象「隣り合う」のいずれが扱いやすいかを吟味する．
2. 順列を考えるので，「隣り合わない」という条件から「仕切り」と「仕切られるもの」の設定を考える．この場合には，
   - 仕切られるものの間に，仕切りを入れる方法
   - 仕切りの間に，仕切られるものを置いていく方法

   の 2 通りの選択肢がある．
3. 「隣り合う」という条件からは，「プレースホルダー (場所取り)」，「カプセル化」の利用，つまり $\boxed{}$ や $\boxed{\triangle\triangle}$ の利用を考える．

   解答では，2° のように，カプセル化として $\boxed{\bigcirc\bigcirc}$，$\boxed{\triangle\triangle}$ を用いている．

といった原則的なアプローチが必要である．

2° (1)では，「赤球が隣り合わない」という条件から，黒球を「仕切り」に，赤球を「仕切られるもの」に考え，仕切り (黒球) の隙間を選んで，赤球 2 個を置くことにより，場合の数を求めている．

もちろん，次のように，余事象を利用してもよい．

$\boxed{\triangle\triangle}$ と n 個の●の順列を考え，2 つの赤球が隣り合う順列の総数 N_1 は

$N_1 = {}_{n+1}\mathrm{C}_1$ (通り)

であり，赤球△ 2 個，黒球● n 個の順列の数は

${}_{n+2}\mathrm{C}_2$ (通り)

であるので，2 つの赤球が隣り合わない順列の数 N_2 は

$$N_2 = {}_{n+2}\mathrm{C}_2 - N_1 = \frac{1}{2}(n+2)(n+1)-(n+1)$$
$$= \frac{1}{2}n(n+1) \text{ (通り)}$$

となる．

3° (2)では同じものを含む順列を考えて N を求めてもよい．この場合には

$$N = \frac{(n+4)!}{2!\cdot 2!\cdot n!}$$
$$= \frac{1}{4}(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)$$

のように N を計算できる．

5 三角関数の極限

問題

実数 θ は $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たし，xy 平面上の放物線 $C: y=ax^2+b$ は2点 A(1, 0)，P($\cos\theta$, $\sin\theta$) を通るものとする．

また，点Pでの C の接線を l とし，C と l と x 軸とで囲まれる部分の面積を S とする．

(1) 点Pでの C の接線 l を $y=mx+n$ とおくとき，m, n を θ を用いて表せ．

(2) S を θ を用いて表せ．

(3) $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{S}{\theta^k}$ が正の値に収束するように自然数 k を定め，そのときの極限値を求めよ．

▶配点率　20%

▶出題のねらい

2次関数のグラフに関する基本的な微分・積分の計算能力を確認し，さらに，$\cos\theta$, $\sin\theta$ のやや複雑な式を，$\theta\to 0$ の場合に極限値の求められる式

$\dfrac{\sin\theta}{\theta}$, $\dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}$

に変形していく能力をみる．

▶解答

(1) 放物線 $C: y=ax^2+b$ が2点

A(1, 0), P($\cos\theta$, $\sin\theta$)

を通る条件は

$0=a+b,\ \sin\theta=a\cos^2\theta+b$ ……①

である．$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から $\sin\theta>0$ であるので

$① \iff b=-a,\ a\sin^2\theta=-\sin\theta$

$\iff a=-\dfrac{1}{\sin\theta},\ b=\dfrac{1}{\sin\theta}$

が成立し，放物線 C は

$C: y=\dfrac{1}{\sin\theta}(-x^2+1)$ ……②

と表される．②より $y'=\dfrac{-2x}{\sin\theta}$

であり，点Pにおける C の接線 l は

$l: y-\sin\theta=\dfrac{-2\cos\theta}{\sin\theta}(x-\cos\theta)$

$\iff y=-\dfrac{2\cos\theta}{\sin\theta}x+\dfrac{\cos^2\theta+1}{\sin\theta}$ ……③

となる．③と $l: y=mx+n$ を比較し

$m=-\dfrac{2\cos\theta}{\sin\theta},\ n=\dfrac{\cos^2\theta+1}{\sin\theta}$ ……(答)

が得られる．

合計 50点

(1) 15点　(2) 15点　(3) 20点

(1) 15点

1) P(cosθ, sinθ) を $y=ax^2+b$ に代入していること．　5点

2) a, b を θ で表して　5点

3) m, n を θ で表して　5点

15

(2) 点Qを$Q(\cos\theta,\ 0)$で定め，lとx軸との交点をRとすると，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$より$\cos\theta>0$，$\sin\theta>0$であるので，③で$y=0$として，

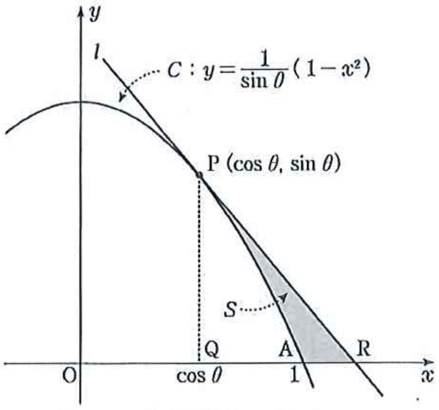
$$0=-\frac{2\cos\theta}{\sin\theta}x+\frac{\cos^2\theta+1}{\sin\theta}$$

$$\Longleftrightarrow\ x=\frac{\cos^2\theta+1}{2\cos\theta}$$

となり，

$$R\left(\frac{\cos^2\theta+1}{2\cos\theta},\ 0\right)$$

が得られる．



したがって，図を参照すればSは

$$S=\triangle PQR-\int_{\cos\theta}^{1}\frac{1}{\sin\theta}(1-x^2)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos^2\theta+1}{2\cos\theta}-\cos\theta\right)\sin\theta-\frac{1}{\sin\theta}\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{\cos\theta}^{1}$$

$$=\frac{(1-\cos^2\theta)\sin\theta}{4\cos\theta}-\frac{\cos^3\theta-3\cos\theta+2}{3\sin\theta}$$ ……(答)

となる．

$$S=\frac{-\cos^4\theta+6\cos^2\theta+8\cos\theta-3}{12\cos\theta\sin\theta}$$

$$=\frac{(1-\cos\theta)^3(\cos\theta+3)}{12\cos\theta\sin\theta}$$

＊正しければOK

(2) 15点

4) 点Rのx座標$\frac{\cos^2\theta+1}{2\cos\theta}$に　5点

5) Sを表す式が書けると　5点

・△PQRのままでよい

・$S=\int_{\cos\theta}^{\frac{\cos^2\theta+1}{2\cos\theta}}(mx+n)dx-\int_{\cos\theta}^{1}\frac{1}{\sin\theta}(1-x^2)dx$ もOK

6) Sを正しくθで表せて　5点

・$\triangle PQR=\frac{(\cos^2\theta+1)^2}{4\cos\theta\sin\theta}-\left\{\frac{\cos\theta(\cos^2\theta+1)}{\sin\theta}-\frac{\cos^3\theta}{\sin\theta}\right\}$

積分で $=\frac{\cos^4\theta+2\cos^2\theta+1}{4\cos\theta\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{(\cos^2\theta-1)^2}{4\cos\theta\sin\theta}=\frac{\sin^3\theta}{4\cos\theta}$

・$\triangle PQR=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos^2\theta+1}{2\cos\theta}-\cos\theta\right)\sin\theta$

幾何 $=\frac{(1-\cos^2\theta)\sin\theta}{4\cos\theta}=\frac{\sin^3\theta}{4\cos\theta}$

・$\int_{\cos\theta}^{1}\frac{1}{\sin\theta}(1-x^2)dx=\frac{2}{3\sin\theta}-\frac{3\cos\theta-\cos^3\theta}{3\sin\theta}$

$=\frac{\cos^3\theta-3\cos\theta+2}{3\sin\theta}$

＊色々て組み合せあり

↑15

(3) (2)の結果から

$$S=\frac{(1-\cos^2\theta)\sin\theta}{4\cos\theta}-\frac{(\cos\theta-1)^2(\cos\theta+2)}{3\sin\theta}$$

$$=\frac{(1-\cos^2\theta)\cdot 3(1-\cos^2\theta)}{12\cos\theta\sin\theta}$$

$$-\frac{(1-\cos\theta)^2\cdot 4(\cos^2\theta+2\cos\theta)}{12\cos\theta\sin\theta}$$

$$=\frac{(1-\cos\theta)^2}{12\cos\theta\sin\theta}\{3(1+\cos\theta)^2$$

$$-4(\cos^2\theta+2\cos\theta)\}$$

$$=\frac{(1-\cos\theta)^3(\cos\theta+3)}{12\cos\theta\sin\theta}\qquad\cdots\cdots④$$

となる．

したがって，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ なる θ に対し，④から

$$\frac{S}{\theta^k}=\frac{(1-\cos\theta)^3(\cos\theta+3)}{12\theta^k\cdot\cos\theta\sin\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta+3}{12\cos\theta}\cdot\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)^3\frac{1}{\frac{\sin\theta}{\theta}}\cdot\theta^{5-k}\qquad\cdots\cdots⑤$$

とすることができ，

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\frac{1}{(1+\cos\theta)}$$

$$=1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

が成立しているので，⑤において

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta+3}{12\cos\theta}\cdot\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)^3\frac{1}{\frac{\sin\theta}{\theta}}$$

$$=\frac{4}{12}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{24}\qquad\cdots\cdots⑥$$

が成立する．よって，$\theta\to+0$ のとき，⑤が正の値に収束する条件は

$$\lim_{\theta\to+0}\theta^{5-k}$$

が正の値に収束することであり，

$$\lim_{\theta\to+0}\theta^{5-k}=\begin{cases}+\infty & (k>5)\\ 1 & (k=5)\\ 0 & (k<5)\end{cases}$$

より，

$$k=5\qquad\cdots\cdots(答)$$

となる．また，$k=5$ のとき，⑤，⑥から

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{S}{\theta^5}=\frac{1}{24}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．

$$\left[S=-\frac{\cos^4\theta-6\cos^2\theta+8\cos\theta-3}{12\cos\theta\sin\theta}=-\frac{(\cos\theta-1)(\cos^3\theta+\cos^2\theta-5\cos\theta+3)}{12\cos\theta\sin\theta}=-\frac{(\cos\theta-1)^2(\cos^2\theta+2\cos\theta-3)}{12\cos\theta\sin\theta}\right]$$

7) $(1-\cos\theta)^3$ を因数として取り出せているか　5点

[$(1-\cos\theta)^1$ だけなら 2点]

8) この式変形に　5点

9) この部分の議論に　5点

10) この値をどこかで求めているか　5点

▶解説

少し煩雑な計算が必要となる問題であるが，基本的に，一本道の計算問題である．(1)，(2)では，計算の方向性に迷うことはないだろう．ただ，(3)では，$(1-\cos\theta)^3$ を因数とする形に S を変形しておかなければ，$\dfrac{S}{\theta^k}$ の極限を調べることができず，式変形の難度が少し高くなっている．

しかし，$\theta\to0$ の場合に用いる既知の極限が

$$\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1,\quad \lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\frac{1}{2}$$

の2つであることを考えれば，(2)で得られた S 内に，$\sin\theta$ と $1-\cos\theta$ が出てくると予想できるのではないだろうか．

(1)，(2)は一本道の計算であるので，

正しい式，正しい値

を答案中に記述し，確実に得点することが重要である．「計算ミスをしたけど，やり方はあっている」といった状況で安心してはいけない．

計算中心の問題では，「正しい式，正しい値」を記述して初めて加点されることがほとんどであり，本問で満点を取れなかった諸君は，最終の結果

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{S}{\theta^5}=\frac{1}{24}$$

が得られるよう，「細心の注意を払い」，本問に再度挑戦してほしい．

1° (3)の式変形では，次の2点を意識しておく必要がある．

ア．$\cos\theta$，$\sin\theta$ の式の $\theta\to0$ のときの極限値を求める際に利用する，既知の極限は

$$\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1,\quad \lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\frac{1}{2}$$

の2つであり，与えられた式の中に式変形を通じて，$\dfrac{\sin\theta}{\theta}$ と $\dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}$ を作っていく必要がある．

イ．一般に $P(t)$ が多項式なら，$\displaystyle\int_a^x P(t)\,dt$ は x の多項式となるが，$x=a$ のとき，その値は

$$\int_a^a P(t)\,dt=0$$

となる．因数定理を考えれば，これは $\displaystyle\int_a^x P(t)\,dt$ で定まる x の多項式が因数 $x-a$ をもつことを示している．

この事実を(2)の定積分に適用すると，

$$\int_{\cos\theta}^1 (1-x^2)\,dx=\frac{1}{3}\cos^3\theta-\cos\theta+\frac{2}{3}$$

は $\cos\theta$ の多項式であり，$\cos\theta=1$ とすれば，この定積分の値は0となるので，この定積分が定める $\cos\theta$ の多項式は $\cos\theta-1$ を因数にもっていることがわかる．実際解答にもあるように，

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\cos^3\theta-\cos\theta+\frac{2}{3}&=\frac{\cos^3\theta-3\cos\theta+2}{3}\\&=\frac{(\cos\theta-1)^2(\cos\theta+2)}{3}\end{aligned}$$

のように因数分解できている．

2° ④から⑤への式変形であるが，④に対し，

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1,\ \lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} = \frac{1}{2}$$

が使えるように，まず $\frac{\sin\theta}{\theta}$，$\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}$ をつくり，右辺の最後に θ^{5-k} をつけて θ の指数が両辺で一致するようにしている．

このように変形しておけば，$\frac{S}{\theta^k}$ が正の値に収束する条件を考えやすくなるはずである．