第 3 回 10 月阪大本番レベル模試　（2021 年 10 月 3 日実施）

採点基準　数学（文系）

【共通事項】

１．約分の未了，根号内の整理不備は１点減点

２．分母の有理化の不備については減点なし

３．別解の配点は解答の配点に準ずる

【文系】（100 点満点）

第１問（30 点満点）

⑴ (配点 8 点)

- ①が $x=0$ を解にもつ条件(b, c の関係式)を示して 2 点
- 上記を満たす c の値と対応する b の値を求めて 4 点
- 答えに 2 点

⑵ (配点 7 点)

- ①が $x<0$ に実数解をもつ条件(b, c に関する不等式)を示して 2 点
- 上記を満たす c の値と対応する b の値を求めて 3 点
- 余事象から答えを求めて 2 点

⑶ (配点 15 点)

- ①が $0 \leqq x \leqq 1$ に実数解をもつ条件(a, b, c に関する不等式)を示して 3 点
- 上記を満たす c の値を求めて 2 点
- $c=1, 2, 3$ それぞれに対する a, b の条件と組 (a, b) の個数を求めて 9 点(各 3 点)
- 答えに 1 点

第２問（35 点満点）

⑴ (配点 10 点)

- $\{a_n\}$ の一般項を求めて 5 点
- $\{b_n\}$ の一般項を求めて 5 点

⑵ (配点 8 点)

- $a_n=gA, b_n=gB$ (A, B は互いに素な整数)のようにおけて 3 点
- 上記の A, B に対して $5=g(8B-A)$ を導いて 3 点
- 残りの部分の説明に 2 点

⑶ (配点 17 点)

- $\{a_n\}$ の奇数項が 5 で割ると 1 余り，偶数項が 5 で割り切れることを数学的帰納法で示す方針を述べて 5 点
- 上記を $n=k$ での成立の仮定の下に，$n=k+1$ での成立を示して 6 点
- $\{b_n\}$ の偶数項が 5 の倍数であることを示して 4 点
- 答えに 2 点

第 3 問（35 点満点）

(1) (配点 10 点)

- $a+b$, ab を c で表して 6 点
- 答えに 4 点

(2) (配点 13 点)

- c の値の範囲が $a+b=1-c$, $ab=c^2-c$ を満たす実数 a，b が存在する c の条件であることを述べて 3 点
- 上記を実数 a，b が t の 2 次方程式 $t^2-(1-c)t+c^2-c=0$ の 2 実数解をもつ条件に言い換えて 6 点
- 答えに 4 点

(3) (配点 12 点)

- $a^3+b^3+c^3$ を c のみで表し，c の関数と考えて 3 点
- 上記の c の関数の増減を調べて 8 点
- 答えまでに 1 点

第 3 回 10 月阪大本番レベル模試　（2021 年 10 月 3 日実施）

採点基準　数学（理系）

【共通事項】

１．約分の未了，根号内の整理不備は１点減点

２．分母の有理化の不備については減点なし

３．別解の配点は解答の配点に準ずる

【理系】（250 点満点）

第１問（50 点満点）

(1) (配点 32 点)

- OP＝GQ＝t のようにおけて 4 点
- 線分 PQ と平面 π_0 との交点 R が線分 PQ を $k:(1-k)$ に内分する点であることを述べて 4 点
- R の座標を (X, Y, Z) のようにおき，X, Y, Z をそれぞれ k, t で表して 12 点
- R の軌跡を表す式を求めて 8 点
- 図に 4 点(x 切片, y 切片がないものは 2 点)

(2) (配点 10 点)

- 平面 π_0 上で正方形となることを説明と合わせて述べて 6 点
- 答えに 4 点

(3) (配点 8 点)

- $V=\int_0^1 S\,dk$ であることを述べて 4 点
- 答えに 4 点

第２問（50 点満点）

(1) (配点 22 点)

- $|a|=|b|=|c|=|x|=|y|=|z|=1$ を述べて 3 点
- BC ⊥ QR が $\dfrac{z-y}{c-b}$ が純虚数であることと同値であることを述べて 3 点
- 上記から $\overline{\left(\dfrac{z-y}{c-b}\right)}=-\dfrac{z-y}{c-b}$ となることを述べて 4 点
- $\overline{y}=\dfrac{1}{y}$, $\overline{z}=\dfrac{1}{z}$, $\overline{b}=\dfrac{1}{b}$, $\overline{c}=\dfrac{1}{c}$ を用いて $yz=-bc$ を導いて 8 点
- $x=-a$ である理由と合わせて証明の結論を述べて 4 点

(2)(配点 8 点)

- $bc+ax=0$, $ca+by=0$, $ab+cz=0$ が成り立つことを述べて 4 点
- 答えに 4 点

(3)(配点 20 点)

- $bc+yz=0$, $ca+zx=0$, $ab+xy=0$ が成り立つことを述べて 3 点
- $(xyz)^2=-(abc)^2$ と同等な式を導いて 4 点
- $xyz=iabc$, $-iabc$ となることを求めて 4 点
- それぞれの条件で x, y, z を求めて 6 点(各 3 点)
- 証明の結論を記述して 3 点

第 3 問（50 点満点）

(1) (配点 12 点)

- 背理法による証明の方針に 4 点
- 上記の方針のもと $\sqrt[3]{2}=\dfrac{n}{m}$ の形において 4 点
- 残りの証明に 4 点

(2) (配点 24 点)

- 背理法による証明の方針に 4 点
- $q\neq 0$ かつ $\sqrt{r}$ が無理数であることを述べて 6 点
- $p+q\sqrt{r}=\sqrt[3]{2}$ の両辺を 3 乗した式から，$\sqrt{r}$ =(有理数)となる式を導いて 11 点
- 残りの証明に 3 点

(3) (配点 14 点)

- $a\neq 0$ のとき 2 次方程式の解の公式を用いて $\sqrt[3]{2}=(a, b, c$ の式$)$ で表して 7 点
- 上記の式が(2)，または $\sqrt[3]{2}$ が実数であることに反することを述べて 4 点
- 残りの証明に 3 点

第 4 問（50 点満点）

(1) (配点 12 点)

- 対称性から点 C, D にある確率が各々 a_n , b_n であることが述べられて 3 点
- 答えに 9 点(各 3 点)

(2) (配点 12 点)

- $\{a_n\}$ の 3 項間漸化式を導いて 3 点
- $\{a_n\}$ の 2 項間漸化式を導いて 3 点
- $\{a_n\}$ の一般項を導いて 6 点(途中計算，結論の式に各 3 点)

(3) (配点 26 点)

- 求める条件付き確率について正しく説明できて 6 点
- 点 P が一度も頂点 C を訪れることなく，n 秒後に頂点 A に到達するには n が奇数であることが必要であることを述べて 3 点
- 上記の遷移とその確率を求めて 8 点
- 途中の計算と答えに 9 点

第 5 問（50 点満点）

(1) (配点 19 点)

- 2 曲線の交点の x 座標を文字 α などでおいて 3 点
- 上記の α に対して $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2k}}$ を述べて 6 点
- S_k を求めるための定積分の立式に 3 点
- 上記の定積分を正しく計算して 3 点
- 上記の α を消去し答えを求めて 4 点

(2) (配点 11 点)

- $k\leqq x\leqq k+1$ に対し $f(k)<\displaystyle\int_k^{k+1}f(x)dx<f(k+1)$ となることを述べて 4 点
- 上記の和から残りの証明ができて 7 点

(3) (配点 20 点)

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}S_k=-\frac{n}{2}\log 2+\frac{n^2}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\log k$ まで求めて 3 点
- (2)で示した式を $f(x)=\log x$ とする利用を明記して 3 点
- 上記から $\displaystyle\frac{1}{n\log n}\int_1^n\log x dx<\frac{1}{n\log n}\sum_{k=1}^{n}\log k<\frac{1}{n\log n}\int_1^n\log x dx+\frac{1}{n}$ を得て 4 点
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\log n}\sum_{k=1}^{n}\log k=1$ を示して 4 点
- 題意の極限の左辺が収束するのに $p=-\dfrac{1}{2}$ が必要であることを導いて 3 点
- 答えを正しく導いて 3 点