2022 年度第 2 回 阪大本番レベル模試

採点基準　数学

【共通事項】

１．約分の未了，根号内の整理不備は１点減点

２．分母の有理化の不備については減点なし

３．別解の配点は解答の配点に準ずる

【文系】（100 点満点）

第 1 問（30 点満点）

(1) (配点 13 点)

- 点 P での接線の方程式を求めて 3 点
- 原点での接線の方程式を求めて 2 点
- 点 Q の x 座標を t で表して 2 点
- S_1 を求める定積分の式，および答えに 6 点

(2) (配点 11 点)

- 点 R の x 座標を t で表して 4 点
- S_2 を求める定積分を含む式，および S_2 の値に 6 点
- $\dfrac{S_2}{S_1}$ を求め，証明の結論を述べて 1 点

(3) (配点 6 点)

- l と l_0 が直交する条件を記述して 2 点
- 相加平均・相乗平均を用いた証明に 4 点

第 2 問（35 点満点）

(1) (配点 12 点)

- n 回の試行で，状態がどのように遷移するかを示して 4 点
- サイコロの目の偶奇の出方を記述して 4 点
- 答えに 4 点

(2) (配点 23 点)

- 題意を満たすときの n 回目の試行直後の箱の状態を述べて 4 点
- n 回目の試行で 2 番の箱に 2 個の球がある状態が(1)の確率に一致することを述べて 2 点
- n 回目の試行で 2 番，3 番の箱に 1 個ずつの球があるときの状態の遷移を示して 4 点
- n 回目の試行で 2 番，3 番の箱に 1 個ずつの球があるときのサイコロの目の偶奇の出方を記述して 6 点
- n 回目の試行で 2 番，3 番の箱に 1 個ずつの球があるときの確率に 6 点
- 答えに 1 点

第 3 問（35 点満点）

- 問題文の等式を $qr=(p+1)(r-2)$ に変形して 6 点
- r が $r-2$ の約数でないことを述べて 6 点
- 上記の説明のもと $p+1=kr$ （k は自然数）のように表して 4 点
- 上記の式において $k=1$ または $k=q$ が必要であることを導いて 4 点
- $k=1$ のとき $p=2$ となることを理由と合わせて述べて 4 点
- $k=1$ のとき q が素数であることに矛盾することを導いて 4 点
- $k=q$ のとき $q=2$ となることを理由と合わせて述べて 4 点
- 答えに 3 点

【理系】（250 点満点）

第 1 問（50 点満点）

(1) (配点 20 点)

- I_2 の値を求めて 6 点
- I_n に部分積分を適用して 8 点
- 答えに 6 点

(2) (配点 30 点)

- $\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2\,dx$ において $\{f(x)\}^2$ を展開した形で表して 6 点
- $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^m x\,dx=0$ （m：正の奇数）を適用して 6 点
- I_4 , I_6 の値を求めて 8 点(各 4 点)
- $\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2\,dx$ を a の関数とみて平方完成して 6 点
- $\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2\,dx$ を最小にする a, b の組と最小値に 4 点(各 2 点)

第 2 問（50 点満点）

(1) (配点 9 点)

- 題意の状況を説明または図などで示して 6 点
- 答えに 3 点

(2) (配点 17 点)

- 1 度目の黒球が 1 回目に出るときの確率を求めて 4 点
- 1 度目の黒球の直前が赤球でないことを述べて 3 点
- 1 度目の黒球が 2 回目以降に出るときの確率を求めて 7 点
- 答えに 3 点

(3) (配点 24 点)

- (1)(2)の結果が利用できることを述べて 3 点
- 題意を満たす球の取り出し方で，$(n-1)$ 回目に赤球，n 回目に黒球を取り出すものがあることを述べて 3 点
- $(n-1)$ 回目に赤球，n 回目に黒球を取り出す場合での場合分け(1 回目から $(n-2)$ 回目までに黒球を取り出すか取り出さないか)に 4 点
- 上記の 1 回目から $(n-2)$ 回目までに黒球を取り出さない場合の確率に 4 点
- 上記の 1 回目から $(n-2)$ 回目までに黒球を取り出す場合の確率に 8 点
- $(n-1)$ 回目に赤球，n 回目に黒球を取り出す場合の確率に 1 点
- 答えに 1 点

第3問（50点満点）

(1) (配点30点)

- 点Pの座標を設定し，円Cの方程式を表して5点
- 円C, C_0の方程式からx^2+y^2を消去した式を作って5点
- 上記の式が直線であることを示して5点
- 円C, C_0の方程式を満たす実数の組(x, y)が存在する条件を点と直線の距離を用いて記述して5点
- 領域$\dfrac{p^2}{9}+\dfrac{q^2}{5} \geqq 1$に点$(\pm 2, 0)$が含まれていないことの説明に5点
- 答えに5点

(2) (配点20点)

- Lの最小値を求めるのに，点Pが境界$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$上にある場合を考えれば十分であることを述べて4点
- L^2の式からy^2を消去し，xの2次関数とみて平方完成を行って8点
- $k=\dfrac{4}{3}$の前後での場合分けができて4点
- 答えに4点

第4問（50点満点）

(1) (配点23点)

- 2つの曲線C_1, C_2の上下関係を調べて5点
- S_1-S_2を定積分の式で表して6点
- 途中の計算と答えに12点

(2) (配点27点)

- S_1-S_2をtの関数とみて微分して6点
- 上記の微分した結果を符号が調べられる形に変形して5点
- S_1-S_2の増減を調べて5点
- S_1-S_2の最大値を与えるtを求めて5点
- S_1-S_2の最大値に6点

第5問（50点満点）

(1) (配点10点)

- z_1, z_2を極形式で表し，さらにz_1+z_2を極形式で表して7点
- 残りの議論に3点

(2) (配点40点)

- α, βを極形式による設定に6点

- $\alpha+\beta=2\cos\dfrac{(k-l)\pi}{n}\left\{\cos\dfrac{(k+l)\pi}{n}+i\sin\dfrac{(k+l)\pi}{n}\right\}$ のように極形式で表して 4 点
- $(\alpha+\beta)^n=\left\{2\cos\dfrac{(k-l)\pi}{n}\right\}^n\cos(k+l)\pi$ のような形で表して 3 点
- 上記の表記に対し，$\alpha+\beta$ が $(*)$ の解である必要条件として，$\left\{2\cos\dfrac{(k-l)\pi}{n}\right\}^n=\pm1$ あるいは $\cos\dfrac{(k-l)\pi}{n}=\pm\dfrac{1}{2}$ を記述して 2 点
- $\cos\dfrac{(k-l)\pi}{n}=\dfrac{1}{2}$ と $\cos\dfrac{(k-l)\pi}{n}=-\dfrac{1}{2}$ の場合分けに 2 点
- $\cos\dfrac{(k-l)\pi}{n}=\dfrac{1}{2}$ のとき，$k+l,\ k-l$ がともに偶数であることを示して 4 点
- $\cos\dfrac{(k-l)\pi}{n}=\dfrac{1}{2}$ を満たす $\dfrac{(k-l)\pi}{n}$ を一般解の形で表し，さらに n が 6 の倍数であることを示して 8 点
- $\cos\dfrac{(k-l)\pi}{n}=-\dfrac{1}{2}$ を満たす $\dfrac{(k-l)\pi}{n}$ を一般解の形で表して 4 点
- 上記の一般解の形から $k-l$ が偶数，n が 3 の倍数であることを示して 4 点
- $\cos\dfrac{(k-l)\pi}{n}=-\dfrac{1}{2}$ の場合にも n が 6 の倍数であることの残りの議論に 3 点