第 1 回 6 月京大本番レベル模試　（2019 年 6 月 23 日実施）

# 採点基準　数学（文系・理系）

【共通事項】

1．約分の未了，根号内の整理不備は 1 点減点

2．分母の有理化の不備については減点なし

3．別解の配点は解答の配点に準ずる

【文系】（150 点満点）

第 1 問（30 点満点）

- $\overrightarrow{\mathrm{OP}}, \overrightarrow{\mathrm{OQ}}, \overrightarrow{\mathrm{OR}}, \overrightarrow{\mathrm{OS}}$ をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で表して 4 点
- 新たにパラメータを設定し，P, Q, R, S が同一平面上にある必要十分条件を述べて 10 点
- $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が 1 次独立であることから，上記のパラメータを $p, q, r, s$ で表して 10 点
- 証明できて 6 点

第 2 問（30 点満点）

- 箱の中に白のカードが残らない事象を正しく場合分けをして 10 点
- 最初に白のカードを取り出す確率を求めて 2 点
- 2 回目に取り出すときに白のカードが含まれる確率を求めて 8 点
- 答えに 10 点

第 3 問（30 点満点）

- P, Q, R の $x$ 座標をそれぞれ $p$, $q$, $r$ としたとき，それぞれの接線の方程式を $p$, $q$, $r$ で表し，接線どうしの交点をそれぞれ $p$, $q$, $r$ で表して 6 点
- G の座標を上記の $p$, $q$, $r$ で表して 4 点
- P を通り直線 QR に垂直な直線, Q を通り直線 RP に垂直な直線をそれぞれ求めて 8 点(各 4 点)
- H の $y$ 座標から $p$, $q$, $r$ の関係式を求めて 8 点
- 証明できて 4 点

第 4 問（30 点満点）

(1)（配点 22 点）

- $C_a$ に外接する円の中心を $\mathrm{B}\left(b, \dfrac{1}{b}\right)$ のようにおき，中心間の距離の関係より $a$, $b$ の関係式 $ab^3-2a^2b^2+a^3b-4=0$ を導いて 8 点
- $f(x)=ax^3-2a^2x^2+a^3x-4$ のようにおき，$f(x)=0$ が 2 つの正の解をもつような $a$ の値を求める方針を立てて 2 点
- 上記の $f(x)$ に対して増減を調べ，極値を求めて 10 点
- 答えに 2 点

(2)（配点 8 点）

- 3 つの円の半径をすべて求めて 4 点
- 答えに 4 点

第 5 問（30 点満点）

- mod 6 で考えたときに, 条件 $(*)$ が $m\equiv 0, \pm 1, \pm 2, 3$ のいずれに対しても $f(m)\equiv 0$ であることと同値であることを述べて 4 点
- mod 6 で $j$ が奇数のとき $2^j\equiv 2$，$j$ が偶数のとき $2^j\equiv -2$，任意の自然数 $j$ に対して $(-2)^j\equiv -2$ であることを述べて 6 点
- mod 6 で任意の自然数 $j$ に対して $3^j\equiv 3$ となることを述べて 2 点
- 条件 $(*)$ が mod 6 で条件 $A+B\equiv 0$，$B-A\equiv 0$，$2(A-B)\equiv 0$，$2(A+B)\equiv 0, 3(A+B)\equiv 0$ がすべて成り立つことであることを述べて 10 点(各 2 点)
- 正しく証明できて 8 点

【理系】（200 点満点）

第 1 問（35 点満点）

- A, B の座標をそれぞれ $t$ で表して 10 点(各 5 点)
- A, B での $K$ の接線の傾きを求めて 4 点
- 線分 AB が円 $E$ の直径であることを示して 6 点
- $\dfrac{S(t)}{t^2}=\dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{e^t-e^{-t}}{t}\right)^2$ を導いて 5 点
- 答えに 10 点

第 2 問（30 点満点）

- 箱の中に白のカードが残らない事象を正しく場合分けをして 10 点
- 最初に白のカードを取り出す確率を求めて 2 点
- 2 回目に取り出すときに白のカードが含まれる確率を求めて 8 点
- 答えに 10 点

第 3 問（30 点満点）

- mod 6 で考えたときに, 条件$(*)$が $m\equiv 0,\pm1,\pm2,3$ のいずれに対しても $f(m)\equiv 0$ であることと同値であることを述べて 4 点
- mod 6 で $j$ が奇数のとき $2^j\equiv 2$， $j$ が偶数のとき $2^j\equiv -2$，任意の自然数 $j$ に対して $(-2)^j\equiv -2$ であることを述べて 6 点
- mod 6 で任意の自然数 $j$ に対して $3^j\equiv 3$ となることを述べて 2 点
- 条件$(*)$が mod 6 で条件 $A+B\equiv 0$, $B-A\equiv 0$, $2(A-B)\equiv 0$, $2(A+B)\equiv 0, 3(A+B)\equiv 0$ がすべて成り立つことであることを述べて 10 点(各 2 点)
- 正しく証明できて 8 点

第 4 問（35 点満点）

(1)（配点 15 点）

- AC ⊥ BD から，$(\gamma-\alpha)(\overline{\delta}-\overline{\beta})+(\overline{\gamma}-\overline{\alpha})(\delta-\beta)=0$ を導いて 6 点
- $\overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}, \overline{\beta}=\dfrac{1}{\beta}, \overline{\gamma}=\dfrac{1}{\gamma}, \overline{\delta}=\dfrac{1}{\delta}$ を利用して結論を導けて 9 点

(2)（配点 20 点）

- $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\neq\vec{0}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OI}}\neq\vec{0}$ のとき， $p$ を $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ で表して 8 点
- $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\vec{0}$ または $\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\vec{0}$ のときも上記の $p$ と $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ の関係が成り立つことを述べて 2 点
- $z$ の方程式 $z^2+az+b=0$ の解と係数の関係から， $\alpha+\gamma=-a$, $\alpha\gamma=b$ を述べて 2 点
- $2p+a$ と $b$ をそれぞれ $\beta,\delta$ で表して 4 点(各 2 点)
- 証明できて 4 点

第 5 問（35 点満点）

(1)（配点 15 点）

- P, Q, R の $x$ 座標をそれぞれ $p, q, r$ としたとき，それぞれの接線の方程式を $p, q, r$ で表し，接線どうしの交点をそれぞれ $p, q, r$ で表して 5 点
- G の座標を上記の $p, q, r$ で表して 2 点
- $p$ と $X$， $q$ と $X$， $r$ と $X$ の関係式をそれぞれ導いて 6 点(各 2 点)
- 証明できて 2 点

(2)（配点 20 点）

- $p, q, r$ が $t$ の 3 次方程式 $t^3-3Xt^2-3t+6X=0$ の解でなければならないことを述べて 2 点
- 上記の逆について述べ，$X$ の取り得る値の範囲は，この $t$ の 3 次方程式が異なる 3 つの実数解をもつための条件として求められることを述べて 6 点
- $f(t)=t^3-3Xt^2-3t+6X$ のようにおき， $f(t)$ の増減を調べて 3 点
- $f(t)$ の極値の符号を考察することにより，結論を導いて 9 点

第 6 問（35 点満点）

- A(1, 0, 0), B( $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, 0), C($a$, $b$, $c$) ($c>0$) のような体積が求めやすい座標を設定して 4 点
- 上記の設定の下， $a^2+b^2+c^2=1$ を述べて 4 点
- 上記の設定の下， $a=\cos\beta$ を導いて 4 点
- 上記の設定の下， $b$ を $\alpha, \beta, \gamma$ で表して 8 点
- $c$ を $\alpha, \beta, \gamma$ で表して 10 点
- 途中の計算と答えに 5 点