最終１月京大本番レベル模試　（2020 年 1 月 25 日実施）

採点基準　数学（文系・理系）

【共通事項】

１．約分の未了，根号内の整理不備は１点減点

２．分母の有理化の不備については減点なし

３．別解の配点は解答の配点に準ずる

【文系】（150 点満点）

第１問（30 点満点）

(1)（配点 20 点）

- l の方程式を求めて４点
- l と x 軸，y 軸の交点の座標を求めて２点
- m の方程式を求めて４点
- m と x 軸，y 軸の交点の座標を求めて２点
- 答えに８点

(2)（配点 10 点）

- U_2 を求める式が立てられて４点
- 計算と答えに６点

第２問（30 点満点）

(1)（配点 10 点）

- 角の二等分線と比の関係を記述して３点
- チェバの定理の逆から証明できて７点

(2)（配点 20 点）

- $\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=a:b$, $\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}=b:c$, $\mathrm{CR}:\mathrm{RA}=c:a$ を述べて３点
- T の位置を把握したうえで，$\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で表して 13 点
- 途中の式変形と答えに４点

第３問（30 点満点）

(1)（配点 10 点）

- ${}_p\mathrm{C}_k$ の定義から，$k!(p-k)!\,{}_p\mathrm{C}_k=p!$ を導いて，この左辺が p で割り切れることを示して４点
- $k!, (p-k)!$ のどちらも p と互いに素であることを示して４点
- 上記の２つから結論を述べて２点

(2)（配点 20 点）

- $2^p+1=3+(p\text{の倍数})$ であることを述べて８点
- 上記と 2^p+1 が p の倍数であることから $p=3$ が必要であることを述べて８点

- $p=3$のとき，条件を満たすことを述べ，$p=3$を結論できて4点

第4問（30点満点）

- 表が上になっている硬貨の枚数の推移と確率を求められて8点
- n回の試行後に表が上になっている硬貨の枚数が$0, 2, 4$である確率をそれぞれa_n, b_n, c_nとしたときに漸化式を立てられて8点
- 上記の設定で$\{c_n\}$だけの漸化式に直して8点
- 残りの計算と答えに6点

第5問（30点満点）

- $a+b\cos A-c$を余弦定理を用いてa, b, cで表して4点
- 上記と三角形の成立条件から，$a+b\cos A>c$を示して4点
- $b+a\cos B>c$を同様に示し，$\min\{a+b\cos A, b+a\cos B\}>c$を述べて5点
- $c^2-|a-b\cos C|^2$を余弦定理を用いてa, b, cで表して4点
- 上記と三角形の成立条件から，$c>|a-b\cos C|$を示して6点
- $c>|b-a\cos C|$を同様に示し，$c>\max\{|a-b\cos C|, |b-a\cos C|\}$を述べて7点

【理系】（200 点満点）

第 1 問（30 点満点）

(1)（配点 10 点）

- 角の二等分線と比の関係を記述して 3 点
- チェバの定理の逆から証明できて 7 点

(2)（配点 20 点）

- $\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=a:b$, $\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}=b:c$, $\mathrm{CR}:\mathrm{RA}=c:a$ を述べて 3 点
- T の位置を把握したうえで，$\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で表して 13 点
- 途中の式変形と答えに 4 点

第 2 問（30 点満点）

- $a+b\cos A-c$ を余弦定理を用いて a, b, c で表して 4 点
- 上記と三角形の成立条件から，$a+b\cos A>c$ を示して 4 点
- $b+a\cos B>c$ を同様に示し，$\min\{a+b\cos A,\, b+a\cos B\}>c$ を述べて 5 点
- $c^2-|a-b\cos C|^2$ を余弦定理を用いて a, b, c で表して 4 点
- 上記と三角形の成立条件から，$c>|a-b\cos C|$ を示して 6 点
- $c>|b-a\cos C|$ を同様に示し，$c>\max\{|a-b\cos C|, |b-a\cos C|\}$ を述べて 7 点

第 3 問（35 点満点）

- $(az^3+bz^2+cz+d)\left\{\overline{a}\,(\overline{z})^3+\overline{b}\,(\overline{z})^2+\overline{c}\,\overline{z}+\overline{d}\right\}=1$ となることを述べて 6 点
- 上記が $(az^3+bz^2+cz+d)\left(\dfrac{\overline{a}}{z^3}+\dfrac{\overline{b}}{z^2}+\dfrac{\overline{c}}{z}+\overline{d}\right)=1$ となることを述べて 4 点
- 上記を式変形し，z の 6 次方程式を導いて 9 点
- 係数がすべて 0 であることを理由と合わせて述べ，必要条件 $d=0, c=0, b=0, \left|a\right|=1$ を順次求めて 8 点
- 上記で求めた条件が十分条件にもなっていることの確認に 6 点
- 結論を述べて 2 点

第 4 問（35 点満点）

- 体積を求める回転体の曲面の方程式を求めて 4 点
- 上記の曲面を xz 平面に平行な平面で切ったときの切り口の方程式を求め，図示して 9 点
- 立体 J の xz 平面に平行な平面で切った切り口を原点の周りに 1 回転した図形の面積を求めて 4 点
- V を求める定積分の式の立式に 4 点
- 途中の計算と答えに 14 点

第５問（35 点満点）

- 書かれている数字の大きい方が k である確率を q_k のように設定し，q_k を求めて(k 以外の別の文字でもよい) 6 点
- 上記で記録された k 個の数を順に $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_k$ とし，$x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_k = n$ となる確率を r_k としたとき，r_k を求めて 6 点
- 大きい数字が k で，かつ，k 回の操作で記録される数字の和が n となる確率を求めて 9 点
- p_n を求めて 6 点
- $n^3 p_n$ を極限を求められる形に変形し，答えを求めて 8 点

第６問（35 点満点）

- 背理法の方針のもと，T に含まれる格子点 (p, q) (p, q は整数)を仮定して 4 点
  ※(p, q は自然数)とした場合には，与えられた不等式から，$x > 0$ であることを示していない場合は 2 点のみ
- $(p, q) \in T_1$ のとき，$\begin{cases} aq - bp > 0 \\ dp - cq > 0 \end{cases}$ となることを述べて 6 点
- $\begin{cases} aq - bp > 0 \\ dp - cq > 0 \end{cases}$ のそれぞれの左辺が整数であることから $\begin{cases} aq - bp \geqq 1 \\ dp - cq \geqq 1 \end{cases}$ と言い換えて 8 点
- $\begin{cases} aq - bp \geqq 1 \\ dp - cq \geqq 1 \end{cases}$ から $p < a + c$ に矛盾することを示して 10 点
- $(p, q) \in T_2$ のときも $(p, q) \in T_1$ のときと同様に矛盾することを示して 7 点