第 3 回 9 月難関大本番レベル模試　（2018 年 9 月 23 日実施）

採点基準　数学（文系・理系）

【共通事項】

１．約分の未了，根号内の整理不備は１点減点

２．分母の有理化の不備については減点なし

３．別解の配点は解答の配点に準ずる

【文系】（100 点満点）

第 1 問（40 満点）

（1）（配点 12 点）

（ア）　4 点

（イ）　4 点

（ウ）　4 点

（2）（配点 13 点）

（ア）　4 点

（イ）　6 点(各 3 点)

（ウ）　3 点

（3）（配点 15 点）

（ア）　6 点(各 3 点)

（イ）　6 点(各 3 点)

（ウ）　3 点

第 2 問（30 点満点）

（1）（配点 8 点）

- $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|, \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|, \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の値をそれぞれ求めて 3 点
- $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積公式を利用し，答えに 5 点

（2）（配点 8 点）

- $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ をパラメータ(s, t)表示し，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0, \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ となる条件式を導けて 3 点
- $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ で設定したパラメータ(s, t)の値を求めて 4 点
- 答えに 1 点

（3）（配点 14 点）

- P の軌跡を求めて 4 点
- 体積Vが最大となるときの点 P の位置を述べて 2 点

- 四面体 ABCP_0 の底面を $\triangle\mathrm{ABC}$ とみたときの高さを求めて 6 点
- 答えに 2 点

第 3 問（30 点満点）

（1）（配点 15 点）

- a, b, c の大小関係を示して 2 点
- tan の加法定理を利用して，a を b, c で表して 4 点
- $a \geqq 1$ より b, c の関係式と値の範囲を導いて 4 点
- b, c のとり得る値を求めて 2 点
- 途中の考え方と答えに 3 点

（2）（配点 15 点）

- n は連続する 4 個の自然数の積であることを述べ, それらのうち少なくとも 1 つは 3 の倍数であることを述べて 3 点
- n が 8 の倍数であることを示す方針をたて，m を 4 で割った余りで場合分けすることを述べて 3 点
- m を 4 で割った余りで場合分けをし，それぞれが 8 の倍数であることを導いて 8 点(各 2 点)
- 証明できて 1 点

【理系】（200 点満点）

第 1 問（60 満点）

（1）（配点 20 点）

（ア） 7 点

（イ） 7 点

（ウ） 6 点

（2）（配点 20 点）

（ア） 6 点

（イ） 8 点(各 4 点)

（ウ） 6 点

（3）（配点 20 点）

（ア） 8 点(各 4 点)

（イ） 8 点(各 4 点)

（ウ） 4 点

第 2 問（30 点満点）

（1）（配点 7 点）

- 判別式より条件を示して 5 点
- 答えに 2 点

（2）（配点 8 点）

- C_1, C_2 の式より 2 点 P, Q を通る式が導けて 6 点
- 答えに 2 点

(3)（配点 15 点）

- 直線 PQ の式を a の方程式 $f(a)=0$ とみて，$f(0)=0$，$f(4)=0$ となるそれぞれの場合に，もう一方の解をもつ条件を考えて 4 点
- $f(0)f(4) \neq 0$ となる場合に解をもつ条件を考えて 4 点
- 条件式を導いて 4 点
- 正しく図示して 3 点

第 3 問（30 点満点）

（1）（配点 8 点）

- $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|, \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|, \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の値をそれぞれ求めて 3 点
- $\triangle$ABC の面積公式を利用し，答えに 5 点

（2）（配点 8 点）

- $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ をパラメータ (s, t) 表示し，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0, \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ となる条件式を導けて 3 点
- $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ で設定したパラメータ (s, t) の値を求めて 4 点
- 答えに 1 点

（3）（配点 14 点）

- P の軌跡を求めて 4 点
- 体積 V が最大となるときの点 P の位置を述べて 2 点
- 四面体 ABCP の底面を $\triangle$ABC とみたときの高さを求めて 6 点
- 答えに 2 点

第 4 問（40 点満点）

（1）（配点 20 点）

- a, b, c の大小関係を示して 2 点
- tan の加法定理を利用して，a を b, c で表して 6 点
- $a \geqq 1$ より b, c の関係式と値の範囲を導いて 4 点
- b, c のとり得る値を求めて 4 点
- 途中の考え方と答えに 4 点

（2）（配点 20 点）

- n は連続する 4 個の自然数の積であることを述べ, それらのうち少なくとも 1 つは 3 の倍数であることを述べて 4 点
- n が 8 の倍数であることを示す方針をたて，m を 4 で割った余りで場合分けすることを述べて 6 点

- m を 4 で割った余りで場合分けをし，それぞれが 8 の倍数であることを導いて 8 点(各 2 点)
- 証明できて 2 点

第 5 問（40 点満点）

（1）（配点 12 点）

- $\sin 2x$ を t で表して 2 点
- $f(x)$ を t の式で表して 4 点
- 合成により、t を $\sin$ のみの式で表して 2 点
- 途中の考え方と答えに 4 点

（2）（配点 16 点）

- $f(x)=g(t)$ とおいて，$g(t)$ の軸の方程式、頂点の座標を求めて 2 点
- 軸の位置による場合分け(a の値による場合分け)を行い，それぞれの最大値，最小値を求めて 14 点(各 7 点)

（3）（配点 12 点）

- t の値による解 x の個数を分類して 3 点
- $g\left(-\sqrt{2}\right)=3$ となるとき，$f(x)=3$ が異なる 3 つの実数解をもつことを述べて 6 点
- 答えに 3 点

第 6 問（40 点満点）

（1）（配点 16 点）

- $\alpha^5=1$ を導いて 2 点
- $1-\alpha^5=(1-\alpha)(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4)$ を示して 2 点
- 途中の計算と $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4$ の値に 4 点
- $(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)(1-\alpha^4)$ を $\left(\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4\right)$ を含んだ式で表して 6 点
- $(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)(1-\alpha^4)$ の値に 2 点

（2）（配点 12 点）

- $d_1=|1-\alpha|,\ d_2=\left|1-\alpha^2\right|$ と表して 4 点(各 2 点)
- 途中の計算と答えに 8 点(各 4 点)

(3)（配点 12 点）

- $\sin\frac{\pi}{5}\cdot\sin\frac{2}{5}\pi\cdot\sin\frac{3}{5}\pi\cdot\sin\frac{4}{5}\pi$ を $d_j\ (j=1,2,3,4)$ で表して 2 点
- $\left|(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)(1-\alpha^4)\right|$ を $d_j\ (j=1,2,3,4)$ で表して 2 点
- $\sin\frac{\pi}{5}\cdot\sin\frac{2}{5}\pi\cdot\sin\frac{3}{5}\pi\cdot\sin\frac{4}{5}\pi$ の値に 2 点

- $\sin\frac{\pi}{5}, \sin\frac{2}{5}\pi, \sin\frac{3}{5}\pi, \sin\frac{4}{5}\pi$ をそれぞれ $\cos\frac{\pi}{10}, \cos\frac{3}{10}\pi$ で表して 4 点
- $\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{3}{10}\pi$ の値に 2 点

第 7 問（40 点満点）

（1）（配点 10 点）

- $I_n=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x(1-\cos^2 x)dx$ と導いて 5 点
- 途中の計算と答えに 5 点

（2）（配点 15 点）

- $0<\cos^{2n+1}x<\cos^{2n}x<\cos^{2n-1}x$ が成り立つことを述べて 3 点
- $0<I_{2n+1}<I_{2n}<I_{2n-1}$ を導き，$1<\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}<\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}$ を証明できて 7 点
- $\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}$ を n の式で表して 3 点
- 答えに 2 点

(3)（配点 15 点）

- I_{2n}, I_{2n+1} をそれぞれ I_0, I_1 で表して 4 点(各 2 点)
- I_0, I_1 をそれぞれ求めて 4 点(各 2 点)
- $I_{2n}I_{2n+1}$ を n を用いて表して 2 点
- $n{I_{2n}}^2$ を $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$ で表して 2 点
- 途中の計算と答えに 3 点