–最終 1 月東大本番レベル模試　（2019 年 1 月 26 日実施）

採点基準　数学（文系・理系）

【共通事項】

１．約分の未了，根号内の整理不備は１点減点

２．分母の有理化の不備については減点なし

３．別解の配点は解答の配点に準ずる

【文科】（80 点満点）

第 1 問（20 点満点）

（1）（配点 14 点）

- F_a の概形を表して 2 点
- a の範囲で正しく場合分けを行って 6 点(各 2 点)
- 答えに 6 点(各 2 点)

（2）（配点 6 点）

- K の概形を表して 2 点
- 途中の計算と答えに 4 点

第 2 問（20 点満点）

（1）（配点 14 点）

- $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_3$ を中心とする円の半径をそれぞれ r_1, r_3 とし，それぞれの方程式を立てて 8 点 (各 4 点)
- r_1, r_3 の値をそれぞれ求めて 4 点（各 2 点）
- 答えに 2 点

（2）（配点 6 点）

- r_2, r_4 の値をそれぞれ求めて 4 点（各 2 点）
- 答えに 2 点

第 3 問（20 点満点）

（1）（配点 3 点）

- 答えに 3 点

（2）（配点 8 点）

- 玉 1 個分および 2 個分回転したときに，それ自身に重なるような並べ方は存在しないことを述べて 4 点(各 2 点)
- 玉 3 個分回転したときにそれ自身に重なるような並べ方が存在し，並べ方は $h(1,1,1)$ 通りであることを述べて 2 点
- 証明できて 2 点

（3）（配点 9 点）

- $f(3,3,3)$ 通りのうち，1 回転してはじめてそれ自身に重なる並べ方は $9h(3,3,3)$ 通りであることと，玉 3 個分回転してそれ自身に重なる並べ方は $3h(1,1,1)$ 通りであることを述べて 6 点(各 3 点)
- 証明できて 2 点
- $g(3,3,3)$ の値を求めて 1 点

第 4 問（20 点満点）

（1）（配点 6 点）

- 数列 $\{a_n\}$ の漸化式より，p_n, q_n, p_{n+1}, q_{n+1} の関係式 $\dfrac{q_{n+1}}{p_{n+1}}=\dfrac{{p_n}^2+{q_n}^2}{p_nq_n}$ を導いて 2 点
- ${p_n}^2+{q_n}^2$ と p_n が互いに素であることを述べて 2 点
- 答えに 2 点

（2）（配点 4 点）

- 途中の考え方と答えに 4 点

（3）（配点 10 点）

- $j=2, 3, 4, \cdots\cdots$ に対し「q_j は q_1, q_2, $\cdots\cdots$, q_{j-1} のいずれとも互いに素である」ことを数学的帰納法を用いて証明する方針をたて，$j=2$ のときに成り立つことを述べて 2 点
- q_{n+1} と q_n は互いに素であることを述べて 4 点
- q_i と q_j が互いに素であることを証明できて 4 点

【理科】（120 点満点）

第 1 問（20 点満点）

（1）（配点 15 点）

- P を中心とする円の半径を r とし，方程式を立てて 4 点
- r の 2 次方程式として，r の値を求めて 4 点
- Q を中心とする円の半径を r' として，r' の値を求めて 6 点
- 答えに 1 点

（2）（配点 5 点）

- PQ の長さを $f(a)$ とおき，$f'(a)$ を求めて 2 点
- 途中の計算と答えに 3 点

第 2 問（20 点満点）

（1）（配点 7 点）

- $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\vec{u}$ の内積より，$y+\dfrac{1}{2}=\sqrt{x^2+y^2+\dfrac{1}{4}}$ を導いて 4 点
- 考え方と答えに 3 点

（2）（配点 13 点）

- $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\vec{u}$ の内積より，$p(y-a)+b=\dfrac{1}{2}\sqrt{p^2+1}\cdot\sqrt{x^2+(y-a)^2+b^2}$ を導いて 4 点
- 上記の式を，(1)で求めた軌跡 R の方程式と係数が比較できるように式を整理し 3 点
- a, b, p の値を正しく求めて 6 点

第 3 問（20 点満点）

（1）（配点 7 点）

- $\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}=2\tan\dfrac{\pi}{n}$ を導いて 2 点
- T_k の体積を求めて 2 点
- 途中の計算と答えに 3 点

（2）（配点 13 点）

- $\mathrm{AR}_k=1-a\cos\dfrac{2\pi k}{n}$ と求めて 3 点
- $V_n(a)\left(=\dfrac{2\pi}{3}\left(1+\dfrac{a^2}{2}\right)n\tan\dfrac{\pi}{n}-\dfrac{4a\pi}{3}\tan\dfrac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\dfrac{2\pi k}{n}+\dfrac{a^2\pi}{3}\tan\dfrac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\dfrac{4\pi k}{n}\right)$ を求めて 4 点
- $\sum_{k=1}^{n}\cos\dfrac{2\pi k}{n}=0,\ \sum_{k=1}^{n}\cos\dfrac{4\pi k}{n}=0$ を示して 4 点
- 途中の計算と答えに 2 点

第 4 問（20 点満点）

（1）（配点 3 点）

- 答えに 3 点

（2）（配点 8 点）

- 玉 1 個分および 2 個分回転したときに，それ自身に重なるような並べ方は存在しないことを述べて 4 点(各 2 点)
- 玉 3 個分回転したときにそれ自身に重なるような並べ方が存在し，並べ方は $h(1,1,1)$ 通りであることを述べて 2 点
- 証明できて 2 点

（3）（配点 9 点）

- $f(3,3,3)$ 通りのうち，1 回転してはじめてそれ自身に重なる並べ方は $9h(3,3,3)$ 通りであることと，玉 3 個分回転してそれ自身に重なる並べ方は $3h(1,1,1)$ 通りであることを述べて 6 点(各 3 点)
- 証明できて 2 点
- $g(3,3,3)$ の値を求めて 1 点

第 5 問（20 点満点）

（1）（配点 6 点）

- 数列 $\{a_n\}$ の漸化式より，p_n, q_n, p_{n+1}, q_{n+1} の関係式 $\dfrac{q_{n+1}}{p_{n+1}}=\dfrac{{p_n}^2+{q_n}^2}{p_nq_n}$ を導いて 2 点
- ${p_n}^2+{q_n}^2$ と p_n が互いに素であることを述べて 2 点
- 答えに 2 点

（2）（配点 4 点）

- 途中の考え方と答えに 4 点

（3）（配点 10 点）

- $j=2, 3, 4, \cdots\cdots$ に対し「q_j は q_1, q_2, $\cdots\cdots$, q_{j-1} のいずれとも互いに素である」ことを数学的帰納法を用いて証明する方針をたて，$j=2$ のときに成り立つことを述べて 2 点
- q_{n+1} と q_n は互いに素であることを述べて 4 点
- q_i と q_j が互いに素であることを証明できて 4 点

第 6 問（20 点満点）

（1）（配点 10 点）

- $\mathrm{P}(t, 0)$ $(0<t<1)$ とおき，t を用いて $l_p(x)$ の方程式を導いて 4 点
- $l_p(x)$ を $f(t)$ とし $f'(t)$ を求め，極値をとる t の値を求めて 4 点
- 答えに 2 点

(2)（配点 10 点）

- (1)で求めた$l_p(x)$の最小値から，$g(x)=\left(\frac{1}{2}+x^{\frac{2}{3}}\right)\sqrt{1-x^{\frac{2}{3}}}$ とし，$g'(x)$を求め，増減表を示して 3 点
- F の概形を示して 1 点
- Sを求める積分式が立式でき，有効な置換積分ができて 3 点
- 途中の計算と答えに 3 点