第 2 回 10 月東北大本番レベル模試　（2019 年 10 月 20 日実施）

採点基準　数学（文系・理系）

【共通事項】

1．約分の未了，根号内の整理不備は 1 点減点

2．分母の有理化の不備については減点なし

3．別解の配点は解答の配点に準ずる

【文系】（200 点満点）

第 1 問（50 点満点）

(1)（配点 10 点）

- $\left(\frac{1}{3},\ 1\right), \left(\frac{1}{3}, -1\right)$ に対応する直線の式を求めて 5 点
- 証明できて 5 点

(2)（配点 15 点）

- 直線 $sx+ty=1$ と x 軸，y 軸に関して対称な直線と図形 U との共有点が，直線 $sx+ty=1$ と図形 U との共有点と同じ個数をもつことを示して 5 点
- 正しく証明できて 10 点

(3)（配点 25 点）

- $s \geqq 0, t \geqq 0$ で考える方針を立て，$(s, t)=(0, 0)$ のときは $sx+ty=1$ を満たす x, y が存在しないことを述べて 4 点
- $t=0$ のときは 3 点で交わることはないことを述べて 2 点
- $0<t\leqq 1$，$1<t$ のときに場合分けをし，それぞれの s, t の不等式が導けて 13 点
- 領域を正しく図示して 6 点

第 2 問（50 点満点）

(1)（配点 20 点）

- $f_n(x)$ を a_n を用いて表して 5 点
- a_{n+1} を定積分の式で表し，計算して 10 点
- 答えに 5 点

(2)（配点 30 点）

- (1)で求めた漸化式の両辺を 2^{n+1} で割り，漸化式の式変形を行って 7 点
- a_n を n を用いて表して 18 点
- 答えに 5 点

第 3 問（50 点満点）

⑴（配点 10 点）

- 途中の計算と答えに 10 点

⑵（配点 10 点）

- 3 で割った余りで 4 通りの場合分けができて 5 点
- 正しい論述に 5 点

⑶（配点 30 点）

- ⑵で行った場合分けに従って考える方針を立てて 5 点
- それぞれの場合で 9 の倍数になることを示して 20 点(各 5 点)
- 証明できて 5 点

第 4 問（50 点満点）

⑴（配点 25 点）

- 試行の結果の総数を求めて 5 点
- $a=b$ となる場合分けを正しく行って 5 点
- それぞれの場合で組合せを求めて 10 点
- 答えに 5 点

⑵（配点 25 点）

- $a>b$ となる場合分けを正しく行って 10 点
- それぞれの場合で組合せの総数を求めて 10 点(各 5 点)
- 答えに 5 点

【理系】（300 点満点）

第 1 問（50 点満点）

(1)（配点 5 点）

- 証明できて 5 点

(2)（配点 45 点）

- 点(X, Y)がD_aに属するための必要十分条件を，方程式$t^2 - Xt + Y = 0$の解の条件ととらえられて 10 点
- $0 < a < 1$のときに，解をもつ条件をそれぞれの場合分けの下で示して 10 点
- $0 < a < 1$のときのD_aの説明，図示に 8 点（説明に 5 点，図示に 3 点）
- $0 < a < 1$のときのS_aを求めて 5 点　※定積分が正しければ，上記図示の 3 点は与える。
- $a = 1, a > 1$について論じて 7 点
- 答えに 5 点

第 2 問（50 点満点）

(1)（配点 20 点）

- 方程式$7x + 12y = 1000$の特殊解を 1 組見つけて 2 点
- 方程式$7x + 12y = 1000$の一般解を求めて 7 点
- 一般解を表すのに用いたパラメータのとり得る値の範囲を求めて 7 点
- 答えに 4 点

(2)（配点 30 点）

- 2 つのパラメータを用いて，$7x + 12y + 4z = 100$の一般解を求めて 13 点
- 一方のパラメータのとり得る値とそれに対応するもう一方のパラメータの値を調べて 14 点
- 答えに 3 点

第 3 問（50 点満点）

(1)（配点 15 点）

- p_1を求めて（答えに）5 点
- A_4が 3 の倍数となるa_1, a_2, a_3, a_4の組合せを考えられて 7 点
- p_2を求めて（答えに）3 点

(2)（配点 20 点）

- $A_{2(n+1)} = A_{2n} + 2^{2n}(a_{2n+1} + a_{2n+2} \cdot 2)$を導き，(　)内を 3 で割った余りに対する確率が$a_1 + a_2 \cdot 2$の場合と同様であることを述べて 8 点
- A_{2n}を 3 で割ったときの余りが 1 のときと 2 のときのそれぞれの確率をq_n, r_nとおいたとき，$p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}r_n$を導いて 8 点
- 答えに 4 点

(3)（配点 15 点）

- (2)で求めた漸化式を一般項が求められる形に式変形を行って 5 点
- 途中の計算と答えに 10 点

第 4 問（50 点満点）

(1)（配点 10 点）

- α, β をそれぞれ極形式で表して 4 点
- 答えに 6 点（各 3 点）

(2)（配点 20 点）

- S_0 を求めて 7 点
- $\triangle \mathrm{OP_0Q_0}$, $\triangle \mathrm{OP_1Q_1}$ の位置関係を把握して 5 点
- 共通部分 $A_0 \cap A_1$ の面積を求めて 5 点
- 途中の計算と S_1 の正しい値に 3 点

(3)（配点 20 点）

- β^{12} を求め，$S_{11} = S_{12}$ となることを示して 6 点
- $S_n = S_{n+1}$ となる最小の n の値を求めて（答えに）4 点
- S_{11} の求め方の説明に 5 点
- S_{11} の値を求めて（答えに）5 点

第 5 問（50 点満点）

(1)（配点 10 点）

- α とベクトル (p, q, r) が直交することを示して 3 点
- 点 $\mathrm{P}(x_1, y_1, z_1)$ との距離 l について証明できて 7 点

(2)（配点 20 点）

- R_1 を求めて 6 点
- 四面体の 4 面の方程式をそれぞれ求めて 4 点
- 証明できて 10 点

(3)（配点 20 点）

- 四面体 ABCD の外接球面の方程式をパラメータを用いておき，これが外心 O' を通るときのパラメータを求めて 10 点
- R_2 を R_1 を用いて表せて 5 点
- 証明できて 5 点

第 6 問（50 点満点）

(1)（配点 10 点）

- $y=x+\dfrac{1}{x}$ が $x=1$ で極小となることを述べて 4 点
- $\lim_{x\to 0}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ の値を求め，$\lim_{x\to\infty}\left(x+\dfrac{1}{x}-x\right)=0$ から $y=x$ が漸近線であることを述べて 2 点
- 正しく図示して 4 点

(2)（配点 10 点）

- 直線 l_t の方程式を求め，　点 P の x 座標を求めて 6 点
- 答えに 4 点

(3)（配点 15 点）

- 曲線 C と直線 l の接点の座標を求めて 5 点
- V_t を求める定積分の式を立てられて 6 点
- 答えに 4 点

(4)（配点 15 点）

- V_t を極限の値が求められる形に変形できて 10 点
- 答えに 5 点