2021 年度大学入学共通テスト 解説〈数学Ⅰ・A〉

第 1 問

〔1〕　$2x^2+(4c-3)x+2c^2-c-11=0$ ……①

(1)　$c=1$ のとき，①の左辺は，

$$2x^2+(4\times1-3)x+2\times1^2-1-11$$
$$=2x^2+x-10$$
$$=(\underline{\underline{2}}x+\underline{\underline{5}})(x-\underline{\underline{2}})$$
……ア，イ，ウ

であるから，①の解は，$x=-\dfrac{5}{2}$，2

(2)　$c=2$ のとき，①は，

$2x^2+(4\times2-3)x+2\times2^2-2-11=0$ より，

$$2x^2+5x-5=0$$

よって，解の公式より，

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times2\times(-5)}}{2\times2}=\underline{\underline{\frac{-5\pm\sqrt{65}}{4}}}$$
……エ，オカ，キ

大きい方の解 α は，$\alpha=\dfrac{-5+\sqrt{65}}{4}$ であるから，

$$\frac{5}{\alpha}=5\times\frac{4}{-5+\sqrt{65}}=\frac{20}{\sqrt{65}-5}$$
$$=\frac{20(\sqrt{65}+5)}{(\sqrt{65}-5)(\sqrt{65}+5)}$$
$$=\frac{20(\sqrt{65}+5)}{65-25}$$
$$=\frac{20(\sqrt{65}+5)}{40}$$
$$=\underline{\underline{\frac{5+\sqrt{65}}{2}}}$$
……ク，ケコ，サ

ここで，$\sqrt{64}<\sqrt{65}<\sqrt{81}$ より，$8<\sqrt{65}<9$ であるから，

$$\frac{5+8}{2}<\frac{5+\sqrt{65}}{2}<\frac{5+9}{2}$$

これより，$6.5<\dfrac{5+\sqrt{65}}{2}<7$ であるから，$m<\dfrac{5}{\alpha}<m+1$ を満たす整数 m は，

$$m=\underline{\underline{6}}$$
……シ

(3)　①の解は，解の公式より，

$$x=\frac{-(4c-3)\pm\sqrt{(4c-3)^2-4\times2\times(2c^2-c-11)}}{2\times2}=\frac{-4c+3\pm\sqrt{-16c+97}}{4}$$

この2解がともに有理数になるのは，根号内の $-16c+97$($=D$ とする)が平方数であるときである。

この根号内は正であるから，

$$-16c+97>0$$

$$c<\frac{97}{16}=6+\frac{1}{16}$$

であり，c は正の整数であるから，

$$c=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

この c のうち，D が平方数となるのは，$c=1$ ($D=81=9^2$)，$c=3$ ($D=49=7^2$)，$c=6$ ($D=1=1^2$) の $\underline{\underline{3}}$ 個である。　　……ス

〔2〕

(1)　$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$　……セ，ソ

よって，△ABC の面積は，$\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times6\times5\times\dfrac{4}{5}=12$　……タチ

また，∠DAI＝180°－A であるから，sin∠DAI＝sin$A$

よって，△AID＝$\dfrac{1}{2}bc\sin A$＝△ABC＝12　……ツテ

(2)　$S_1=a^2$，$S_2=b^2$，$S_3=c^2$ である。

0°＜A＜90° のとき，$a^2<b^2+c^2$ であるから，$S_1<S_2+S_3$　よって，$S_1-S_2-S_3<0$

A＝90° のとき $a^2=b^2+c^2$ であるから，$S_1=S_2+S_3$　よって，$S_1-S_2-S_3=0$

90°＜A＜180° のとき $a^2>b^2+c^2$ であるから，$S_1>S_2+S_3$　よって，$S_1-S_2-S_3>0$

よって，この順に　②，⓪，①　……ト，ナ，ニ

(3)　(1)の　　　線部と同様に，△BEF＝△ABC，△CGH＝△ABC であるから，

a，b，c の値に関係なく，$T_1=T_2=T_3$

よって，③　……ヌ

(4)　0°＜A＜90° のとき，∠IAD＝180°－A より，90°＜∠IAD＜180° であるから，直角をはさむ2辺の長さが b, c である直角三角形の斜辺の長さを d とすると，(2)と同様に，

$\mathrm{ID}^2>d^2(=b^2+c^2)>\mathrm{BC}^2$　これより，ID＞BC　……(☆)

よって，②　……ネ

ここで，△ABC，△AID の外接円の半径をそれぞれ R，R_1 とすると，正弦定理より，

$$2R_1=\frac{\mathrm{ID}}{\sin\angle\mathrm{IAD}}=\frac{\mathrm{ID}}{\sin(180^\circ-A)}=\frac{\mathrm{ID}}{\sin A},\quad 2R=\frac{\mathrm{BC}}{\sin A}$$

であるから，(☆)より，$R_1>R$　……(★)

よって，②　……ノ

次に，△BEF，△CGH の外接円の半径をそれぞれ R_2，R_3 とすると，

- 0°＜A＜B＜C＜90° のとき，(★)と同様に，$R_2>R$，$R_3>R$ もいえるから，R，R_1，R_2，R_3 の中で最も小さいのは R である。

　よって，⓪　……ハ

- 0°＜A＜B＜90°＜C のとき，0°＜A＜B＜90° より，$R_1>R$，$R_2>R$ がいえ，90°＜C より $R_3<R$ がいえるから，R，R_1，R_2，R_3 の中で最も小さいのは R_3 である。

　よって，③　……ヒ

第 2 問

〔1〕

(1)　ストライドを x m/歩，ピッチを z 歩/秒，100 m を走るのにかかった歩数を a 歩，タイムを t 秒とおくと，定義より，

$x=\dfrac{100}{a}$　……㋐，$z=\dfrac{a}{t}$　……㋑

㋐，㋑を辺々かけると，$xz=\dfrac{100}{t}$　すなわち，平均速度は xz　(……②)　……ア

これより，$t=\dfrac{100}{xz}$　……①

(2)　z が x の 1 次関数であると仮定すると，その変化の割合は，$\dfrac{-0.1}{0.05}=-2$

これと，$x=2.05$ のとき $z=4.70$ であることから，

$z=-2(x-2.05)+4.70$　よって，$z=-2x+8.8=-2x+\dfrac{44}{5}$　……②　……イウ，エオ

ピッチの最大値が $z=4.80$ のとき，$4.80\geqq -2x+8.8$ より，$x\geqq 2.00$

これと $x\leqq 2.40$ より，$2.00\leqq x\leqq 2.40$　……カ，キク

$y=xz$ とおくと，これに②を代入して，

$y=x\left(-2x+\dfrac{44}{5}\right)=-2x^2+\dfrac{44}{5}x=-2\left(x-\dfrac{11}{5}\right)^2+\dfrac{242}{25}$

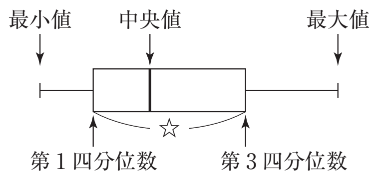
y の $2.00\leqq x\leqq 2.40$ における最大値は，$2.00<\dfrac{11}{5}<2.40$ より，x(ストライド)$=\dfrac{11}{5}=2.20$ のときであり，このとき，②より，z(ピッチ)は，$z=-2\times 2.20+8.8=4.40$ である。

……ケ，コサ，シ，スセ

このときのタイムは，①より，$t=\dfrac{100}{2.20\times 4.40}=\dfrac{100}{9.68}=10.330\cdots$　(……③)　……ソ

〔2〕

(1) 「四分位範囲」とは，箱ひげ図における右図の☆の長さを表し，1975 年度から 2000 年度まで長さは減少しているから，⓪は正しい。



1990 年度，2000 年度，2010 年度においては，右側のひげの長さが左側のひげの長さより長いから，①は正しくない。

1990 年度以降は，第 2 次産業の就業者割合の中央値は，後の時代になるにしたがって減少しているから，②は正しい。

第 2 次産業の就業者割合の第 1 四分位数は，1975 年度から 1980 年度，1985 年度から 1990 年度にかけて増えているから，③は正しくない。

第 3 次産業の就業者割合の第 3 四分位数は，後の時点になるにしたがって増加しているから，④は正しい。

第 3 次産業の就業者割合の最小値は，後の時点になるにしたがって増加しているから，⑤は正しい。

よって，正しくないものは，①，③　……タ，チ

(2) 1985 年度の第 1 次産業の就業者割合の最大値は，(1)の箱ひげ図より，25％以上 30％未満であるから，これと合致するヒストグラムは，①と③。

このうち，1985 年度の第 3 次産業の就業者割合の最小値が 45％であるヒストグラムは，①。

よって，1985 年度におけるグラフは，①　……ツ

次に，1995 年度の第 1 次産業の就業者割合の最大値は，(1)の箱ひげ図より，15％以上 20％未満であるから，これと合致するヒストグラムは，②と④。

ここで，47 都道府県の第 3 次産業の就業者割合の中央値は，小さい方から 24 番目であるが，ヒストグラムより，②の中央値は 60％以上 65％未満，④の中央値は 55％以上 60％未満であるから，(1)の箱ひげ図に合致するのは，④。

よって，1995 年度におけるグラフは，④　……テ

(3) 図 2，図 3 の左端の散布図を比べると，第 1 次産業の就業者割合と，第 2 次産業の就業者割合については，図 2 の散布図には負の相関があるが，図 3 の散布図には特に相関はないから，図 2 を基準にすると，図 3 の相関は弱くなった。したがって，(I)は誤り。

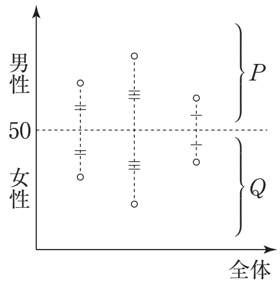
図 2，図 3 の真ん中の散布図を比べると，第 2 次産業の就業者割合と，第 3 次産業の就業者割合については，図 2 の散布図には特に相関はないが，図 3 の散布図には負の相関があるから，図 2 を基準にすると，図 3 の相関は強くなった。したがって，(II)は正しい。

図 2，図 3 の右端の散布図を比べると，第 3 次産業の就業者割合と，第 1 次産業の就業者割合については，図 2 の散布図には負の相関があるが，図 3 の散布図には特に相関はないから，

図２を基準にすると，図３の相関は弱くなった。したがって，(Ⅲ)は誤り。

以上から，(Ⅰ) 誤　(Ⅱ) 正　(Ⅲ) 誤　(……⑤)　……ト

(4)　横軸に第１次産業の就業者割合，縦軸に男性の就業者割合をとった散布図(P とする)と，横軸に第１次産業の就業者割合，縦軸に女性の就業者割合をとった散布図(Q とする)の関係を１つの散布図に表すと，右図のように縦軸の目盛り 50％を通る横軸に平行な直線に関して対称となる(男性と女性の就業者割合の和は 100％ となるから)。



よって，⓪～③の散布図の中から，P と上下逆になった散布図を選ぶと，答えは②　……ナ

第 3 問

(1)

(i) 箱 A において，当たりくじを引く確率は $\frac{1}{2}$，外れくじを引く確率は $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ であるから，

3 回中ちょうど 1 回当たる確率は，

$${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\underline{\underline{\frac{3}{8}}}\quad\cdots\cdots①\qquad\cdots\cdots ア，イ$$

箱 B において，当たりくじを引く確率は $\frac{1}{3}$，外れくじを引く確率は $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ であるから，

3 回中ちょうど 1 回当たる確率は，

$${}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2=\underline{\underline{\frac{4}{9}}}\quad\cdots\cdots②\qquad\cdots\cdots ウ，エ$$

(ii) A を選ぶ確率と B を選ぶ確率はともに $\frac{1}{2}$ であるから，①，②より，

$$P(A\cap W)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{16}\quad\cdots\cdots③,\quad P(B\cap W)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}=\frac{2}{9}\quad\cdots\cdots④$$

これより，$P(W)=P(A\cap W)+P(B\cap W)=\frac{59}{144}$ ……⑤

よって，③，⑤より，$P_W(A)=\frac{P(A\cap W)}{P(W)}=\frac{3}{16}\times\frac{144}{59}=\underline{\underline{\frac{27}{59}}}$ ……オカ，キク

また，④，⑤より，$P_W(B)=\frac{P(B\cap W)}{P(W)}=\frac{2}{9}\times\frac{144}{59}=\underline{\underline{\frac{32}{59}}}$ ……ケコ，サシ

[別解] $P_W(B)=1-P_W(A)=1-\frac{27}{59}=\frac{32}{59}$

(2) $P_W(A):P_W(B)=\frac{P(A\cap W)}{P(W)}:\frac{P(B\cap W)}{P(W)}=P(A\cap W):P(B\cap W)=①:②$ であるから，正しい選択肢は $\underline{\underline{③}}$ ……ス

(3) 箱 C において，3 回中ちょうど 1 回当たる確率は，${}_3C_1\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{64}$ ……⑥

よって，①，②，⑥より，

$$\begin{aligned}P(W)&=P(A\cap W)+P(B\cap W)+P(C\cap W)\\&=\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\times\frac{27}{64}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{3}{8}+\frac{4}{9}+\frac{27}{64}\right)\\&=\frac{1}{3}\times\frac{216+256+243}{9\times64}=\frac{715}{3\times9\times64}\quad\cdots\cdots⑦\end{aligned}$$

よって，①，⑦より，

$$P_W(A)=\frac{P(A\cap W)}{P(W)}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}\times\frac{3\times9\times64}{715}=\underline{\underline{\frac{216}{715}}}\qquad\cdots\cdots セソタ，チツテ$$

⑷　箱 D において，3 回中ちょうど 1 回当たる確率は，$\dfrac{1}{5}\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^2\times{}_3\mathrm{C}_1=\dfrac{48}{125}$　……⑧

よって，花子さんの考えを用いると，①，②，⑥，⑧より，

$$P_W(A):P_W(B):P_W(C):P_W(D)=\frac{3}{8}:\frac{4}{9}:\frac{27}{64}:\frac{48}{125}$$

$$=27000:32000:30375:27648$$

であるから，可能性が高い方から順に，B，C，D，A　(……⑧)　……ト

第 4 問

以下，さいころを投げて偶数の目が x 回，奇数の目が y 回出るとして計算を行う。

(1)　さいころを 5 回投げて，点 P_0 にある石を点 P_1 に移動させることができたとき，

$$x+y=5,\ 5x-3y=1$$

が成り立つから，これらを解けば，$x=\underline{\underline{2}}$，$y=\underline{\underline{3}}$ ……ア，イ

(2)　$5x-3y=8$ ……①

(1)より，$5\times2-3\times3=1$ であるから，この式の両辺に 8 を掛けると，

$5\times2\times8-3\times3\times8=1\times8$ ……②

①－②をつくれば，$5(x-16)-3(y-24)=0$

これより，$5(x-16)=3(y-24)$ となり，5 と 3 は互いに素であるから，k を整数として，

$x-16=3k$，$y-24=5k$ すなわち，$x=16+\underline{\underline{3}}k$，$y=24+\underline{\underline{5}}k$ ……③ ……ウ，エ

③より，①の整数解の中で，$0\leqq y<5$ を満たすものは，$k=-4$ の場合で，このとき，

$x=16+3\times(-4)=\underline{\underline{4}}$，$y=24+5\times(-4)=\underline{\underline{4}}$ ……オ，カ

したがって，さいころを $\underline{\underline{8}}$ 回投げて，偶数の目が 4 回，奇数の目が 4 回出れば，点 P_0 にある石を点 P_8 に移動させることができる。 ……キ

(3)　$8-15=-7$ より，石を点 P_0 から反時計回りに -7(時計回りに 7)移動させても点 P_8 に移すことができる。

このとき，$5x-3y=-7$ の正の整数解 x，y のうち，$x+y<8$ を満たすものは，$x=1$，$y=4$ すなわち，偶数の目が $\underline{\underline{1}}$ 回，奇数の目が $\underline{\underline{4}}$ 回出れば，さいころを投げる回数が $1+4=\underline{\underline{5}}$ (回)で，点 P_0 にある石を点 P_8 に移動させることができる。 ……ク，ケ，コ

(4)　点 P_0 にある石を，**サ**の解答群にある点 P_{10}～P_{14} に移動させるための，さいころを投げる最小回数をそれぞれ求める。

石を反時計回りにいくつ移動すればよいか($5x-3y$ の値)と，それを満たす整数解 x，y のうち，$x+y$ が最小になるものを求めて，表にすると，右のようになる。

移る先	P_{10}	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_{14}
$5x-3y$	10	11	12	13	14
$(x,\ y)$	(2, 0)	(4, 3)	(3, 1)	(5, 4)	(4, 2)
$5x-3y$	-5	-4	-3	-2	-1
$(x,\ y)$	(2, 5)	(1, 3)	(0, 1)	(2, 4)	(1, 2)
最小回数	2 回	4 回	1 回	6 回	3 回

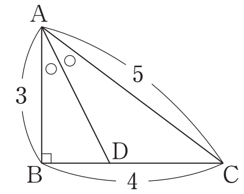
よって，最小回数が最も多いのは，

点 P_{13} (……③) ……サ

であり，その最小回数は $\underline{\underline{6}}$ 回である。 ……シ

第５問

$AB^2+BC^2=CA^2(3^2+4^2=5^2)$ であるから，△ABC は ∠B＝90° の直角三角形である。

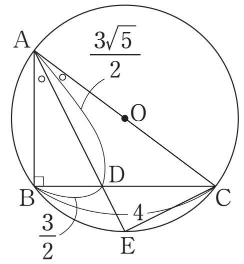


右の図で，角の二等分線の性質より，BD：DC＝BA：AC＝3：5 であるから，

$$BD=\frac{3}{3+5}BC=\frac{3}{8}\times4=\underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$ ……ア，イ

よって，

$$AD=\sqrt{AB^2+BD^2}=\sqrt{3^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}\sqrt{2^2+1^2}=\underline{\underline{\frac{3\sqrt{5}}{2}}}$$ ……ウ，エ，オ

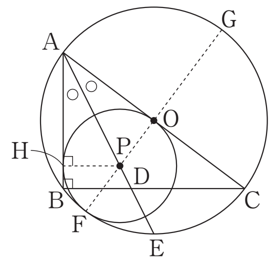


また，△AEC∽△ABD より，

AE：AB＝AC：AD

であるから，

$$AE=\frac{AB\times AC}{AD}=\frac{3\times5}{\frac{3\sqrt{5}}{2}}=\underline{\underline{2}}\sqrt{\underline{\underline{5}}}$$ ……カ，キ



さらに，右の図のようになるから，円 P と辺 AB との接点を H とすると，△AHP∽△ABD(…☆) より，AP：AD＝HP：BD

であるから，

$$AP=\frac{AD\times HP}{BD}=\frac{\frac{3\sqrt{5}}{2}\times r}{\frac{3}{2}}=\sqrt{\underline{\underline{5}}}\,r$$ ……ク

また，円 P と円 O の接点 F と点 P を結ぶ直線 FP は，２円 P，O の中心線であるから，FG は円 O の直径 (＝AC＝5) である。

よって，$PG=FG-FP=\underline{\underline{5}}-r$ ……ケ

したがって，方べきの定理より，

AP×EP＝FP×GP

が成り立つから，

$$\sqrt{5}r\times(2\sqrt{5}-\sqrt{5}r)=r\times(5-r)$$

$r\neq0$ より，

$$\sqrt{5}(2\sqrt{5}-\sqrt{5}r)=5-r$$

$$10-5r=5-r$$

よって，$r=\underline{\underline{\frac{5}{4}}}$ ……コ，サ

△ABC の内接円 Q の半径を q とすると，△ABC の面積について，

$$\frac{1}{2}\times AB\times q+\frac{1}{2}\times BC\times q+\frac{1}{2}\times CA\times q=\frac{1}{2}\times AB\times BC$$

が成り立つから，これより，

$(3+4+5)q=3\times4$　よって，$q=\underline{\underline{1}}$　……シ

Q は直線 AD 上にあるから，円 Q と辺 AB の接点を I とすると，△AIQ∽△ABD より，

AQ：AD＝QI：DB

$$\mathrm{AQ}=\frac{\mathrm{AD}\times\mathrm{QI}}{\mathrm{DB}}=\frac{\frac{3\sqrt{5}}{2}\times1}{\frac{3}{2}}=\sqrt{\underline{\underline{5}}}$$　……ス

また，(☆)より，AH：AB＝HP：BD であるから，

$$\mathrm{AH}=\frac{\mathrm{AB}\times\mathrm{HP}}{\mathrm{BD}}=\frac{3\times\frac{5}{4}}{\frac{3}{2}}=\frac{\underline{\underline{5}}}{\underline{\underline{2}}}$$　……セ，ソ

このとき，

$$\mathrm{AH}\times\mathrm{AB}=\frac{5}{2}\times3=\frac{15}{2},\quad \mathrm{AQ}\times\mathrm{AD}=\sqrt{5}\times\frac{3\sqrt{5}}{2}=\frac{15}{2}$$

より，AH×AB＝AQ×AD が成り立つから，方べきの定理の逆より，4 点 H，B，D，Q は同一円周上にある。すなわち，点 H は 3 点 B，D，Q を通る円の周上にあり，(a)は正しい。

また，明らかに AH×AB≠AQ×AE であるから，4 点 H，B，E，Q は同一円周上にはない。すなわち，点 H は 3 点 B，E，Q を通る円の周上になく，(b)は誤り。

よって，正誤の組合せとして正しいものは，$\underline{\underline{①}}$　……タ