2021 年度大学入学共通テスト 解説〈数学Ⅱ・B〉

第 1 問

〔1〕

(1)　$y=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta\ \left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ について，

$$\sin\frac{\pi}{\underline{\underline{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\frac{\pi}{\underline{\underline{3}}}=\frac{1}{2}$$ ……ア

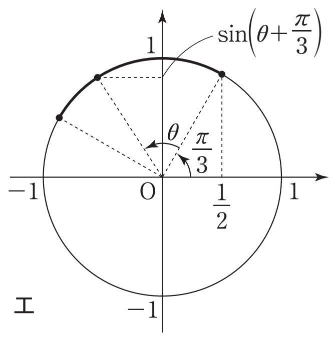
であるから，三角関数の合成により，与式は，

$$y=2\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{2}+\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\underline{\underline{2}}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$ ……イ

と変形できる。



よって，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$\frac{\pi}{3}\leqq\theta+\frac{\pi}{3}\leqq\frac{5}{6}\pi$$

であるから，

y は $\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$　すなわち，$\theta=\dfrac{\pi}{\underline{\underline{6}}}$ で最大値 $\underline{\underline{2}}$ ……ウ，エ

をとる。

(2)　$y=\sin\theta+p\cos\theta\ \left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ について，

(i)　$p=0$ のとき，$y=\sin\theta\ \left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ となるので，

$\theta=\dfrac{\pi}{\underline{\underline{2}}}$ で最大値 $\underline{\underline{1}}$ をとる。 ……オ，カ

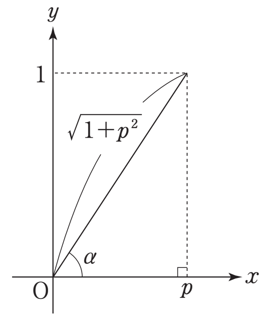
(ii)　$p>0$ のときは，

$$\sin\theta+p\cos\theta=\sqrt{1+p^2}\left(\cos\theta\cdot\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}+\sin\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\right)$$

と変形でき，

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}},\quad \cos\alpha=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$

(……①)　(……③) ……ク，ケ



となる $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いて，加法定理

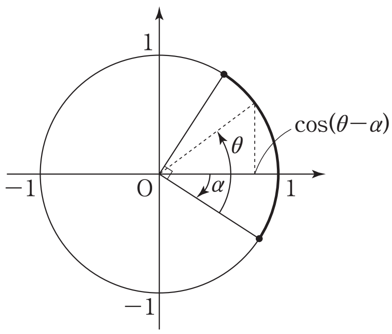
$$\cos(\theta-\alpha)=\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha$$

を用いれば，与式は，

$$y=\sqrt{1+p^2}(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha)=\sqrt{1+p^2}\cos(\theta-\alpha)$$

(……⑨)　　……キ

と表すことができる。



よって，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$-\alpha\leqq\theta-\alpha\leqq\frac{\pi}{2}-\alpha$$

であるから，

y は $\theta-\alpha=0$　すなわち，$\theta=\alpha$ で最大値 $\sqrt{1+p^2}$

(……①)　(……⑨)　　……コ，サ

をとる。

(iii)　$p<0$ のとき，$p=-q$ $(q>0)$ とおくと，与式は，

$$y=\sin\theta+p\cos\theta=\sin\theta-q\cos\theta$$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ なので，$\sin\theta$ は増加し，$\cos\theta$ は減少し，$q>0$ より y は増加する。

よって，

$y=\sin\theta-q\cos\theta$ は $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，最大値 1 をとる

(……②)　(……①)　　……シ，ス

〔2〕

(1) $f(0)=\dfrac{2^0+2^{-0}}{2}=\dfrac{1+1}{2}=\underline{\underline{1}}$，$g(0)=\dfrac{2^0-2^{-0}}{2}=\dfrac{1-1}{2}=\underline{\underline{0}}$ ……セ，ソ

また，$2^x>0$ であるから，$f(x)$ は相加平均と相乗平均の関係から，

$$f(x)=\frac{2^x+2^{-x}}{2}=\frac{2^x+\frac{1}{2^x}}{2}\geqq\sqrt{2^x\cdot\frac{1}{2^x}}=1$$

$\left(\text{この等号は } 2^x=\dfrac{1}{2^x} \text{ つまり，} (2^x)^2=1 \text{ のとき成立する}\right)$

これより，$f(x)$ は $2^x=1$　つまり $x=\underline{\underline{0}}$ で最小値 $f(0)=\underline{\underline{1}}$ をとる ……タ，チ

また，$g(x)=-2$ のとき，

$g(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}=\dfrac{2^x-\frac{1}{2^x}}{2}$　だから，$2^x=X$ $(X>0)$ とおくと，

$\dfrac{X-\frac{1}{X}}{2}=-2$　つまり $X-\dfrac{1}{X}=-4$ となり，$X^2-1=-4X$

これより，$X^2+4X-1=0$ を得るので，$X>0$ に注意してこれを解くと，

$2^x=X=-2+\sqrt{5}$　　よって，$x=\log_2(\sqrt{\underline{\underline{5}}}-\underline{\underline{2}})$ ……ツ，テ

(2) $f(-x)=\dfrac{2^{-x}+2^{-(-x)}}{2}=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}=f(x)$ ……①

(……$\underline{\underline{0}}$) ……ト

$g(-x)=\dfrac{2^{-x}-2^{-(-x)}}{2}=\dfrac{2^{-x}-2^x}{2}=-\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}=-g(x)$ ……②

(……$\underline{\underline{3}}$) ……ナ

また，

$\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=(f(x)+g(x))(f(x)-g(x))$

$=2^x\cdot2^{-x}=\underline{\underline{1}}$ ……③ ……ニ

$g(2x)=\dfrac{2^{2x}-2^{-2x}}{2}=\dfrac{(2^x)^2-(2^{-x})^2}{2}$

$=\dfrac{(2^x+2^{-x})(2^x-2^{-x})}{2}$

$=2\times\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}\times\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}=\underline{\underline{2}}f(x)g(x)$ ……④ ……ヌ

(3) $f(0)=1$，$g(0)=0$ に注意して，太郎さんが考えた4つの式

$f(\alpha-\beta)=f(\alpha)g(\beta)+g(\alpha)f(\beta)$ ……(A)

$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)f(\beta)+g(\alpha)g(\beta)$ ……(B)

$$g(\alpha-\beta)=f(\alpha)f(\beta)+g(\alpha)g(\beta) \quad \cdots\cdots (C)$$

$$g(\alpha+\beta)=f(\alpha)g(\beta)-g(\alpha)f(\beta) \quad \cdots\cdots (D)$$

を考えると，$\beta=0$ として，

(A)では，$f(\alpha)=f(\alpha)g(0)+g(\alpha)f(0)=g(\alpha)$

常に $f(x)=g(x)$ とはならないので，(A)は不成立。

(C)では，$g(\alpha)=f(\alpha)f(0)+g(\alpha)g(0)=f(\alpha)$

よって，(C)も(A)と同様に不成立。

(D)では，$g(\alpha)=f(\alpha)g(0)-g(\alpha)f(0)=-g(\alpha)$

常に $g(x)=-g(x)$ とはならないので，(D)は不成立。

以上より(B)以外の三つは成り立たないことがわかる。

(……1)　……ネ

そこで(B)について，

$$f(\alpha)f(\beta)=\frac{2^{\alpha}+2^{-\alpha}}{2}\times\frac{2^{\beta}+2^{-\beta}}{2}$$

$$=\frac{1}{4}\left(2^{\alpha}+\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\left(2^{\beta}+\frac{1}{2^{\beta}}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(2^{\alpha}2^{\beta}+\frac{2^{\alpha}}{2^{\beta}}+\frac{2^{\beta}}{2^{\alpha}}+\frac{1}{2^{\alpha}}\times\frac{1}{2^{\beta}}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(2^{\alpha+\beta}+\frac{2^{\alpha}}{2^{\beta}}+\frac{2^{\beta}}{2^{\alpha}}+\frac{1}{2^{\alpha+\beta}}\right) \quad \cdots\cdots ⑤$$

$$g(\alpha)g(\beta)=\frac{2^{\alpha}-2^{-\alpha}}{2}\times\frac{2^{\beta}-2^{-\beta}}{2}$$

$$=\frac{1}{4}\left(2^{\alpha}-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\left(2^{\beta}-\frac{1}{2^{\beta}}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(2^{\alpha+\beta}-\frac{2^{\alpha}}{2^{\beta}}-\frac{2^{\beta}}{2^{\alpha}}+\frac{1}{2^{\alpha+\beta}}\right) \quad \cdots\cdots ⑥$$

⑤＋⑥より，

$$f(\alpha)f(\beta)+g(\alpha)g(\beta)=\frac{1}{4}\left(2\times2^{\alpha+\beta}+2\times\frac{1}{2^{\alpha+\beta}}\right)$$

$$=\frac{2^{\alpha+\beta}+\frac{1}{2^{\alpha+\beta}}}{2}$$

$$=\frac{2^{\alpha+\beta}+2^{-(\alpha+\beta)}}{2}=f(\alpha+\beta)$$

となり，成り立つことが確かめられる。

第２問

(1)　　$y=3x^2+2x+3$　……①

　　$y=2x^2+2x+3$　……②

①，②の２次関数のグラフの共通点について考える。

y 軸との交点の y 座標は，①，②について $x=0$ として，$\underline{\underline{3}}$　……ア

また，y 軸との交点 $(0,\ 3)$ における接線を考えると，

①から，$y'=6x+2$ なので，$x=0$ での微分係数は 2

②から，$y'=4x+2$ なので，$x=0$ での微分係数は 2

以上より，y 軸との交点 $(0,\ 3)$ における接線はいずれも傾きが 2 であるから，その方程式は，

$y=\underline{\underline{2}}x+\underline{\underline{3}}$　……イ，ウ

である。

y 軸との交点における接線の方程式が $y=2x+3$ のとき，これは $(0,\ 3)$ を通る。
さらに，$x=0$ での微分係数が 2 となることを考えると，適する２次関数は，

$y=-x^2+2x+3$　(……$\underline{\underline{④}}$)　……エ

次に a，b，c が 0 でない実数とするとき，

$y=ax^2+bx+c$ 上の点 $(0,\ \underline{\underline{c}})$ における接線 l について，　……オ

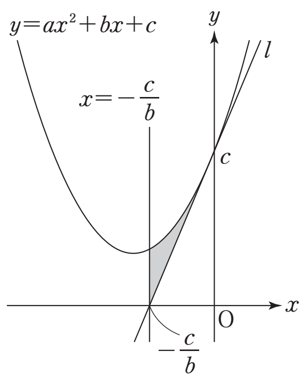
$y'=2ax+b$ より，$x=0$ での微分係数は b，切片は c なので，接線 l の方程式は，

$y=\underline{\underline{b}}x+\underline{\underline{c}}$　……カ，キ

よって，接線 l と x 軸との交点の x 座標は，$b\neq 0$ より，

$x=\underline{\underline{\dfrac{-c}{b}}}$　……クケ，コ

である。



ここで，a，b，c が正の実数であるとき，

曲線 $y=ax^2+bx+c$ と接線 l，および直線 $x=-\dfrac{c}{b}$ で囲まれた図形の面積 S は，$-\dfrac{c}{b}<0$ より，右図の網目部分となる。

$$S=\int_{-\frac{c}{b}}^{0}\{ax^2+bx+c-(bx+c)\}dx$$

$$=\int_{-\frac{c}{b}}^{0}ax^2dx$$

$$=\left[\frac{a}{3}x^3\right]_{-\frac{c}{b}}^{0}$$

$$=\frac{ac^{\underline{\underline{3}}}}{\underline{\underline{3}}b^{\underline{\underline{3}}}}\quad\cdots\cdots③$$　……サ，シ，ス

である。この③で $a=1$ のとき S の値

$$\frac{c^3}{3b^3}=\frac{1}{3}\left(\frac{c}{b}\right)^3$$

が一定となるように b, c を $b>0$, $c>0$ の下で変化させるときを考える。

$\frac{1}{3}\left(\frac{c}{b}\right)^3=\frac{k^3}{3}$ （k は 0 でない一定値）とおけて

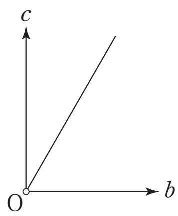
$$c^3=k^3b^3 \iff 0=k^3b^3-c^3$$
$$=(kb-c)(k^2b^2+kbc+c^2)$$
$$=(kb-c)\left\{\left(c+\frac{kb}{2}\right)^2+\frac{3}{4}k^2b^2\right\}$$

ここで，$\left(c+\frac{kb}{2}\right)^2+\frac{3}{4}k^2b^2>0$ なので，題意を満たすのは，

$kb-c=0$　すなわち，$c=kb$ （$b>0$, $c>0$）

よって，これより b と c が比例の関係であるとわかるので，

b と c の関係を表すグラフの概形は 0　……セ



(2)　$y=4x^3+2x^2+3x+5$　……④

$y=-2x^3+7x^2+3x+5$　……⑤

$y=5x^3-x^2+3x+5$　……⑥

④，⑤，⑥の 3 次関数のグラフの共通点について考える。

y 軸との交点の y 座標は，④，⑤，⑥について $x=0$ として，5　……ソ

また，y 軸との交点 (0, 5) における接線を考えると，

④から，$y'=12x^2+4x+3$ なので，$x=0$ での微分係数は 3

⑤から，$y'=-6x^2+14x+3$ なので，$x=0$ での微分係数は 3

⑥から，$y'=15x^2-2x+3$ なので，$x=0$ での微分係数は 3

以上より，y 軸との交点 (0, 5) における接線はいずれも傾きが 3 であるから，その方程式は，

$y=3x+5$　……タ，チ

である。

次に a, b, c, d を 0 でない実数とするとき，$y=ax^3+bx^2+cx+d$ 上の点 $(0, d)$　……ツ

における接線について，$y'=3ax^2+2bx+c$ より，$x=0$ での微分係数は c であるから，接線の方程式は，

$y=cx+d$　……テ，ト

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $g(x)=cx+d$ について，

$$h(x)=f(x)-g(x)=ax^3+bx^2$$

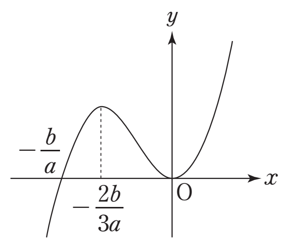
であるから，

$$h'(x)=3ax^2+2bx=3ax\left(x+\frac{2b}{3a}\right)$$

よって，$a>0$，$b>0$ に注意すると，$h(x)$ の増減表は，右のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{2b}{3a}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$

よって，$y=h(x)$ のグラフの概形は ② ……ナ



また，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフの共有点の x 座標は，

$f(x)=g(x)$ より $f(x)-g(x)=0$ つまり $h(x)=0$

を満たすので，$\dfrac{-b}{a}$ と 0 ……ニヌ，ネ，ノ

また，x が $-\dfrac{b}{a}$ と 0 の間を動くとき，$h(x)>0$ であるから，

$$|f(x)-g(x)|=|h(x)|=|ax^3+bx^2|$$

の値が最大となるのは，

$$x=\frac{-2b}{3a}$$ ……ハヒフ，ヘホ

のときである。

第 3 問

(1)　全く読書をしなかった生徒の母比率が 0.5 で，無作為に 100 人を選んだとき，読書をしたか，全くしていないかを考えるので，全く読書をしなかった生徒の数を表す確率変数 X は，

二項分布 $B(100,\ 0.5)$ に従う。
(……③)　　……ア

このとき，X の期待値 $E(X)$ は，

$E(X)=100\times0.5=50$　　……イウ

標準偏差 σ は，

$\sigma=\sqrt{100\times0.5\times(1-0.5)}=5$　　……エ

である。

(2)　標本の大きさ 100 は十分に大きいので，

二項分布 $B(100,\ 0.5)$ は $N(E(X),\ \sigma^2)$，つまり正規分布 $N(50,\ 25)$ に従う。

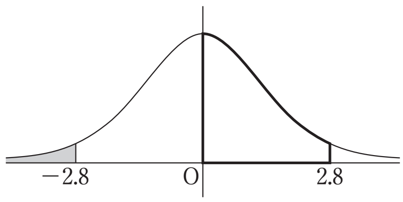
これを標準化すると，

$$Z_0=\frac{X-50}{5}$$

より，Z_0 は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うので，

$X=36$ のとき，$Z_0=\dfrac{-14}{5}=-2.8$ より，

$p_5=P(X\leqq36)=P(Z_0\leqq-2.8)$



そこで，右図の太線部の面積を正規分布表で求めると，

0.4974

であるから，

$p_5=$(網目部の面積)$=0.5-0.4974=0.0026$

これに近いものは，0.003　(……①)　　……オ

また，全く読書をしなかった生徒の母比率が 0.4 のとき，

$E(X)=100\times0.4=40$

標準偏差 σ は，

$\sigma=\sqrt{100\times0.4\times(1-0.4)}=2\sqrt{6}$

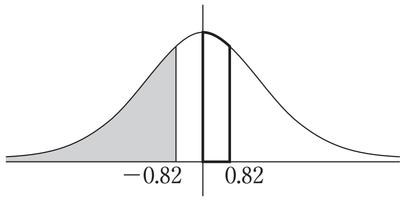
二項分布 $B(100,\ 0.4)$ は，正規分布 $N(40,\ 24)$ に従う。

これを標準化すると，

$$Z_0'=\frac{X-40}{2\sqrt{6}}$$

より，Z_0' は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うので，

$X=36$ のとき，$Z_0{}'=\dfrac{36-40}{2\sqrt{6}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ （≒0.82）



そこで，右図の太線部の面積を正規分布表で求めると，

0.2939

であるから，

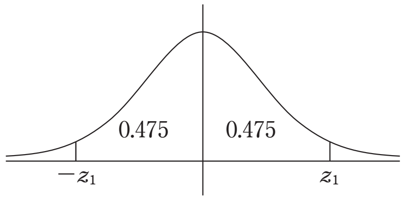
$p_4=$（網目部の面積）$=0.5-0.2939=0.2061>p_5$

よって，$p_4>p_5$ である。

（……②）　　……カ

(3)　1 週間の読書時間の母平均 m に対して，標本平均が 204，母標準偏差が 150，さらに標本の大きさが十分大きいことから，これも正規分布に従い，

$$Z=\frac{204-m}{\sqrt{\dfrac{(150)^2}{100}}}=\frac{204-m}{15}$$



により，信頼度 95 % の信頼区間 $C_1\leqq m\leqq C_2$ を求めると，

正規分布表で，0.475 を与える Z_1 は，

$Z_1=1.96$

よって，

$-1.96\leqq\dfrac{204-m}{15}\leqq1.96$　より　$-29.4\leqq204-m\leqq29.4$

つまり，

$204-29.4\leqq m\leqq204+29.4$

となるので，

$C_1+C_2=408$　　……キクケ

$C_2-C_1=58.8$　　……コサ，シ

この C_1，C_2 と m に対して，95 % の信頼区間であるため必ずしも，

$C_1\leqq m$ も $m\leqq C_2$ も成り立つとは限らない　（……③）　　……ス

(4)　無作為抽出であるため，n と 36 の大小はわからない　（……③）　　……セ

(5)　標本平均によって D_1，D_2 は変化するので，

$D_2<C_1$ または $C_2<D_1$ となる場合もある

つまり，⓪，①は誤りであり，②は正しい。

また，(3)で標本平均を $\overline{x}$ としたとき，$\overline{x}$ によらず信頼度 95 % により，

$Z_1=1.96$

を得て，

$$-1.96 \leqq \frac{\overline{x}-m}{15} \leqq 1.96 \quad \text{つまり} \quad -29.4 \leqq \overline{x}-m \leqq 29.4$$

となる。

　これより，必ず $C_2-C_1=2\times 29.4=58.8$ となるので，C_2-C_1 は標準平均によらない。

よって，$C_2-C_1=D_2-D_1$ が必ず成り立つ

　つまり，③，⑤は誤りであり，④は正しい。

　以上より，正しいものは，②，④　……ソ，タ

（解答の順序は問わない）

第 4 問

$$a_nb_{n+1}-2a_{n+1}b_n+3b_{n+1}=0 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \quad \cdots\cdots①$$

(1)　数列 $\{a_n\}$ は初項 3，公差 p の等差数列より，

$$a_n=\underline{\underline{3}}+(n-1)p \quad \cdots\cdots②$$ ……ア

これより，

$$a_{n+1}=3+np \quad \cdots\cdots③$$

数列 $\{b_n\}$ は初項 3，公比 r の等比数列より，

$$b_n=\underline{\underline{3}}r^{n-1}$$ ……イ

と表される。$r \neq 0$ より，すべての自然数 n について $b_n \neq 0$ となるので，

$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=r$ であることから，①の両辺を b_n で割ると，

$$\frac{a_nb_{n+1}}{b_n}-\frac{2a_{n+1}b_n}{b_n}+\frac{3b_{n+1}}{b_n}=0 \quad \text{つまり，} \quad ra_n-2a_{n+1}+3r=0$$

よって，

$$\underline{\underline{2}}a_{n+1}=r(a_n+\underline{\underline{3}}) \quad \cdots\cdots④$$ ……ウ，エ

が成り立ち，④に②と③を代入すると，

$$2(3+np)=r\{3+(n-1)p+3\}$$

よって，

$$(r-\underline{\underline{2}})pn=r(p-\underline{\underline{6}})+\underline{\underline{6}} \quad \cdots\cdots⑤$$ ……オ，カ，キ

となる。⑤がすべての n について成り立つことと，$p \neq 0$ より，

$$\begin{cases} r-2=0 \\ r(p-6)+6=0 \end{cases}$$

よって，$r=2$，$p=\underline{\underline{3}}$ ……ク

以上から，すべての自然数 n について，a_n と b_n が正であることもわかる。

(2)　$p=3$，$r=2$ のとき

$$a_n=3+3(n-1)=3n$$

よって，

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n} 3k=3\sum_{k=1}^{n} k=3\times\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{3}{\underline{\underline{2}}}n(n+\underline{\underline{1}})$$ ……ケ，コ，サ

また，

$$b_n=3\cdot 2^{n-1}$$

よって，

$$\sum_{k=1}^{n} b_k=\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k-1}=3\times\frac{2^n-1}{2-1}=\underline{\underline{3}}(2^n-\underline{\underline{1}})$$ ……シ，ス

(3)　$a_nc_{n+1}-4a_{n+1}c_n+3c_{n+1}=0\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$　……⑥

⑥を変形して，

$(a_n+3)c_{n+1}=4a_{n+1}c_n$

$a_n>0$ より，$a_n+3>0$ であるから，$c_{n+1}=\dfrac{4a_{n+1}}{a_n+3}c_n$　……セ，ソ

を得る。

$p=3$ のとき，$a_n=3n$，$a_{n+1}=3(n+1)$ より，

$$c_{n+1}=\frac{4\times3(n+1)}{3n+3}c_n=4c_n$$

これより，数列 $\{c_n\}$ は公比が 1 より大きい等比数列であることがわかる。

(……②)　……タ

(4)　$d_nb_{n+1}-qd_{n+1}b_n+ub_{n+1}=0\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$　……⑦

すべての自然数 n について，$b_n\neq0$ であるから，⑦の両辺を b_n で割って，

$$\frac{d_nb_{n+1}}{b_n}-qd_{n+1}+\frac{ub_{n+1}}{b_n}=0$$

$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=r=2$ より，$2d_n-qd_{n+1}+2u=0$

よって，

$d_{n+1}=\dfrac{2}{q}(d_n+u)$　……チ

を得る。したがって，数列 $\{d_n\}$ が，公比が 0 より大きく 1 より小さい等比数列となるための必要十分条件は，

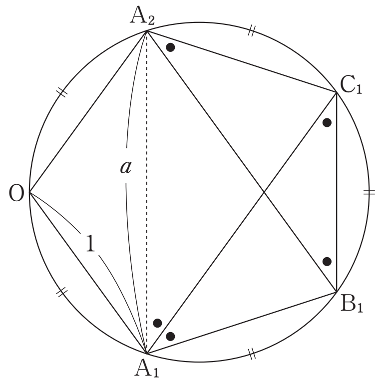
$u=0$ かつ $0<\dfrac{2}{q}<1$　つまり，$q>2$ かつ $u=0$ である。　……ツ，テ

第 5 問

(1)　正五角形の 1 つの内角の大きさは，

$$\frac{180^\circ\times(5-2)}{5}=108^\circ$$

よって，この外接円を考えると，



$$\angle \mathrm{A_1C_1B_1}=\frac{108^\circ}{3}=\underline{\underline{36}}^\circ$$ ……アイ

$$\angle \mathrm{C_1A_1A_2}=36^\circ$$

となり，これより錯角が等しくなるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{B_1C_1}}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}|=a$，$|\overrightarrow{\mathrm{B_1C_1}}|=1$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}=\underline{\underline{a}}\,\overrightarrow{\mathrm{B_1C_1}}$$ ……ウ

であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{B_1C_1}}=\frac{1}{a}\,\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}=\frac{1}{a}(\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}-\overrightarrow{\mathrm{OA_1}})$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{A_2B_1}}$ で，さらに $\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{A_1C_1}}$ も成り立つので，

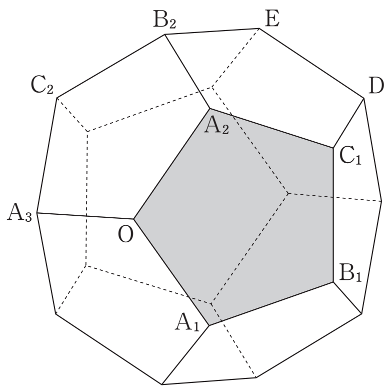
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{B_1C_1}}&=\overrightarrow{\mathrm{B_1O}}+\overrightarrow{\mathrm{OC_1}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{B_1A_2}}+\overrightarrow{\mathrm{A_2O}}+\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}+\overrightarrow{\mathrm{A_1C_1}}\\&=-\overrightarrow{\mathrm{A_2B_1}}-\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}+\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}+\overrightarrow{\mathrm{A_1C_1}}\\&=-a\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}-\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}+\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}+a\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}\\&=(a-1)\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}-(a-1)\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}\\&=(\underline{\underline{a}}-\underline{\underline{1}})(\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}-\overrightarrow{\mathrm{OA_1}})\end{aligned}$$ ……エ，オ

となる。したがって，

$\dfrac{1}{a}=a-1$ より，$a^2-a-1=0$

$a>0$ に注意してこれを解くと　$a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ を得る。

(2)　右の正十二面体を考えるとき，



面 $\mathrm{OA_1B_1C_1A_2}$ に着目して，$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{A_2B_1}}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB_1}}=\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}+\overrightarrow{\mathrm{A_2B_1}}=\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}+a\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}$$ ……①

また，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}-\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}|^2\\&=a^2\\&=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\end{aligned}$$

$$=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$ ……カ，キ，ク

これと，

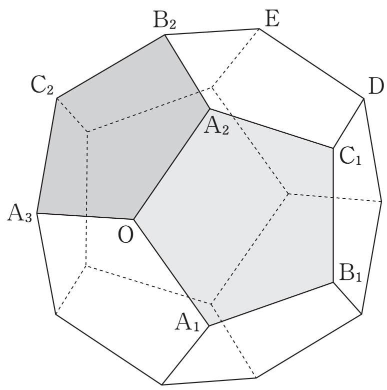
$$|\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}-\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}$$
$$=2-2\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}$$

より，

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2}=2-2\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$$ ……ケ，コ，サ



次に，面 $\mathrm{OA_2B_2C_2A_3}$ に着目すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB_2}}=\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}+a\overrightarrow{\mathrm{OA_2}} \quad \cdots\cdots②$$

である。

さらに，各面がすべて合同な正五角形なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}=\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}=\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

が成り立つことがわかる。このことから，②の辺々で $\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}$ との内積をとり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB_2}}=\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}+a\overrightarrow{\mathrm{OA_2}})$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}+a\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}$$
$$=(a+1)\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}$$
$$=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)\times\frac{1-\sqrt{5}}{4}$$
$$=\frac{-1-\sqrt{5}}{4} \quad (\cdots\cdots⑨)$$ ……シ

さらに，①，②より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB_2}}=\overrightarrow{\mathrm{OB_1}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}+a\overrightarrow{\mathrm{OA_2}})$$
$$=(\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}+a\overrightarrow{\mathrm{OA_1}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}+a\overrightarrow{\mathrm{OA_2}})$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}+a|\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}|^2+a\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}+a^2\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}+a|\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}|^2+a\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}+a^2\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}$$
$$=(1+a+a^2)\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}+a$$

ここで，$a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ は $a^2=a+1$ の解であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB_2}}=(2a+2)\times\frac{1-\sqrt{5}}{4}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$=(3+\sqrt{5})\times\frac{1-\sqrt{5}}{4}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$=\frac{-2-2\sqrt{5}}{4}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$=0$$

（……0）　……ス

これより，$\overrightarrow{\mathrm{OB_1}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB_2}}$ ……③ とわかる。

ここで，面 $\mathrm{A_2C_1DEB_2}$ に着目すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{B_2D}}=a\,\overrightarrow{\mathrm{A_2C_1}}=\overrightarrow{\mathrm{OB_1}}$$

であることに注意すると，4 点 O，$\mathrm{B_1}$，D，$\mathrm{B_2}$ は同一平面上にある。

また，$\mathrm{OB_2}$，$\mathrm{B_1D}$，$\mathrm{OB_1}$，$\mathrm{B_2D}$ はすべて合同な正五角形の対角線であるため，

$$\mathrm{OB_2}=\mathrm{B_1D}=\mathrm{OB_1}=\mathrm{B_2D}=a$$

よって，四角形 $\mathrm{OB_1DB_2}$ は少なくともひし形で，③と合わせて，

四角形 $\mathrm{OB_1DB_2}$ は正方形であることがわかる。

（……0）　……セ