

試験開始の指示があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。

数 学 ②

〔数学Ⅱ〕

(100点)
(60分)

㊦

簿記・会計及び情報関係基礎の問題冊子は、大学入学共通テストの出願時に、それぞれの科目の受験を希望した者に配付します。

I 注 意 事 項

- 1 解答用紙に、正しく記入・マークされていない場合は、採点できないことがあります。特に、解答用紙の解答科目欄にマークされていない場合又は複数の科目にマークされている場合は、0点となることがあります。
- 2 出題科目、ページ及び選択方法は、下表のとおりです。

| 出 題 科 目 | ペ ー ジ | 選 択 方 法 |
|---------|-------|-------------------------------|
| 数 学 Ⅱ | 4～22 | 左の2科目のうちから1科目を選択し、 解答しなさい。 |
| 数学Ⅱ・数学B | 23～48 | |

- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を高く挙げて監督者に知らせなさい。
- 4 選択問題については、いずれか2問を選択し、その問題番号の解答欄に解答しなさい。
- 5 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 6 不正行為について
 - ① 不正行為に対しては厳正に対処します。
 - ② 不正行為に見えるような行為が見受けられた場合は、監督者がカードを用いて注意します。
 - ③ 不正行為を行った場合は、その時点で受験を取りやめさせ退室させます。
- 7 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

II 解答上の注意

解答上の注意は、裏表紙に記載してあります。この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。

II 解答上の注意

- 1 解答は、解答用紙の問題番号に対応した解答欄にマークしなさい。
- 2 問題の文中の **ア**，**イウ** などには、符号(−)，数字(0～9)，又は文字(a～d)が入ります。ア，イ，ウ，…の一つ一つは、これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア，イ，ウ，…で示された解答欄にマークして答えなさい。

例 **アイウ** に $-8a$ と答えたいとき

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|----------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|----------------------------------|---|----------------------------------|---|---|---|
| ア | <input checked="" type="radio"/> | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | a | b | c | d |
| イ | <input type="radio"/> | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | <input checked="" type="radio"/> | 9 | a | b | c | d |
| ウ | <input type="radio"/> | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | <input checked="" type="radio"/> | b | c | d |

- 3 数と文字の積の形で解答する場合、数を文字の前にして答えなさい。
例えば、 $3a$ と答えるところを、 $a3$ と答えてはいけません。
- 4 分数形で解答する場合、分数の符号は分子につけ、分母につけてはいけません。

例えば、 $\frac{\text{エオ}}{\text{カ}}$ に $-\frac{4}{5}$ と答えたいときは、 $-\frac{4}{5}$ として答えなさい。

また、それ以上約分できない形で答えなさい。

例えば、 $\frac{3}{4}$ ， $\frac{2a+1}{3}$ と答えるところを、 $\frac{6}{8}$ ， $\frac{4a+2}{6}$ のように答えてはいけません。

- 5 小数の形で解答する場合、指定された桁数の一つ下の桁を四捨五入して答えなさい。また、必要に応じて、指定された桁まで **0** にマークしなさい。

例えば、**キ** . **クケ** に 2.5 と答えたいときは、2.50 として答えなさい。

- 6 根号を含む形で解答する場合、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば、 $4\sqrt{2}$ ， $\frac{\sqrt{13}}{2}$ ， $6\sqrt{2a}$ と答えるところを、 $2\sqrt{8}$ ， $\frac{\sqrt{52}}{4}$ ， $3\sqrt{8a}$ のように答えてはいけません。

- 7 問題の文中の二重四角で表記された **コ** などには、選択肢から一つを選んで、答えなさい。

- 8 同一の問題文中に **サシ**，**ス** などが2度以上現れる場合、原則として、2度目以降は、**サシ**，**ス** のように細字で表記します。

数 学 II

(全問必答)

第1問 (配点 30)

[1] 座標平面上に点 $A(-8, 0)$ をとる。また, 不等式

$$x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 \leq 0$$

の表す領域を D とする。

(1) 領域 D は, 中心が点 $(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}})$, 半径が $\boxed{\text{ウ}}$ の円の

$\boxed{\text{エ}}$ である。

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

- | | | |
|----------|----------|------|
| ① 周 | ② 内部 | ③ 外部 |
| ④ 周および内部 | ⑤ 周および外部 | |

以下, 点 $(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}})$ を Q とし, 方程式

$$x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$$

の表す図形を C とする。

(数学II第1問は次ページに続く。)

(2) 点 A を通る直線と領域 D が共有点をもつのはどのようなときかを考えよう。

(i) (1)により, 直線 $y = \boxed{\text{オ}}$ は点 A を通る C の接線の一つとなることがわかる。

太郎さんと花子さんは点 A を通る C のもう一つの接線について話している。

点 A を通り, 傾きが k の直線を l とする。

太郎: 直線 l の方程式は $y = k(x + 8)$ と表すことができるから,
これを

$$x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$$

に代入することで接線を求められそうだね。

花子: x 軸と直線 AQ のなす角のタンジェントに着目することでも求められそうだよ。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

数学Ⅱ

(ii) 太郎さんの求め方について考えてみよう。

$y = k(x + 8)$ を $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$ に代入すると、 x についての2次方程式

$$(k^2 + 1)x^2 + (16k^2 - 10k - 4)x + 64k^2 - 80k + 4 = 0$$

が得られる。この方程式が **カ** ときの k の値が接線の傾きとなる。

カ の解答群

- ① 重解をもつ
- ② 異なる二つの実数解をもち、一つは0である
- ③ 異なる二つの正の実数解をもつ
- ④ 正の実数解と負の実数解をもつ
- ⑤ 異なる二つの負の実数解をもつ
- ⑥ 異なる二つの虚数解をもつ

(iii) 花子さんの求め方について考えてみよう。

x 軸と直線 AQ のなす角を θ ($0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$) とすると

$$\tan \theta = \frac{\text{キ}}{\text{ク}}$$

であり、直線 $y = \text{オ}$ と異なる接線の傾きは $\tan \text{ケ}$ と表すことができる。

ケ の解答群

- ① θ
- ② 2θ
- ③ $\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$
- ④ $\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$
- ⑤ $(\theta + \pi)$
- ⑥ $(\theta - \pi)$
- ⑦ $\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right)$
- ⑧ $\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

- (iv) 点 A を通る C の接線のうち、直線 $y = \boxed{\text{オ}}$ と異なる接線の傾きを k_0 とする。このとき、(ii) または (iii) の考え方をを用いることにより

$$k_0 = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

であることがわかる。

直線 l と領域 D が共有点をもつような k の値の範囲は $\boxed{\text{シ}}$ である。

$\boxed{\text{シ}}$ の解答群

① $k > k_0$

② $k < k_0$

④ $0 < k < k_0$

① $k \geq k_0$

③ $k \leq k_0$

⑤ $0 \leq k \leq k_0$

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

数学Ⅱ

〔2〕 a, b は正の実数であり, $a \neq 1, b \neq 1$ を満たすとする。太郎さんは $\log_a b$ と $\log_b a$ の大小関係を調べることにした。

(1) 太郎さんは次のような考察をした。

まず, $\log_3 9 = \boxed{\text{ス}}$, $\log_9 3 = \frac{1}{\boxed{\text{ス}}}$ である。この場合

$$\log_3 9 > \log_9 3$$

が成り立つ。

一方, $\log_{\frac{1}{4}} \boxed{\text{セ}} = -\frac{3}{2}$, $\log_{\boxed{\text{セ}}} \frac{1}{4} = -\frac{2}{3}$ である。この場合

$$\log_{\frac{1}{4}} \boxed{\text{セ}} < \log_{\boxed{\text{セ}}} \frac{1}{4}$$

が成り立つ。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

(2) ここで

$$\log_a b = t \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

とおく。

(1)の考察をもとにして、太郎さんは次の式が成り立つと推測し、それが正しいことを確かめることにした。

$$\log_b a = \frac{1}{t} \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

①により、ソである。このことによりタが得られ、②が成り立つことが確かめられる。

ソの解答群

- | | | |
|-------------|-------------|-------------|
| ① $a^b = t$ | ② $a^t = b$ | ③ $b^a = t$ |
| ④ $b^t = a$ | ⑤ $t^a = b$ | ⑥ $t^b = a$ |

タの解答群

- | | | |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| ① $a = t^{\frac{1}{b}}$ | ② $a = b^{\frac{1}{t}}$ | ③ $b = t^{\frac{1}{a}}$ |
| ④ $b = a^{\frac{1}{t}}$ | ⑤ $t = b^{\frac{1}{a}}$ | ⑥ $t = a^{\frac{1}{b}}$ |

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

数学Ⅱ

(3) 次に、太郎さんは(2)の考察をもとにして

$$t > \frac{1}{t} \dots\dots\dots ③$$

を満たす実数 t ($t \neq 0$) の値の範囲を求めた。

太郎さんの考察

$t > 0$ ならば、③の両辺に t を掛けることにより、 $t^2 > 1$ を得る。

このような t ($t > 0$) の値の範囲は $1 < t$ である。

$t < 0$ ならば、③の両辺に t を掛けることにより、 $t^2 < 1$ を得る。

このような t ($t < 0$) の値の範囲は $-1 < t < 0$ である。

この考察により、③を満たす t ($t \neq 0$) の値の範囲は

$$-1 < t < 0, 1 < t$$

であることがわかる。

ここで、 a の値を一つ定めたとき、不等式

$$\log_a b > \log_b a \dots\dots\dots ④$$

を満たす実数 b ($b > 0$, $b \neq 1$) の値の範囲について考える。

④を満たす b の値の範囲は、 $a > 1$ のときは **チ** であり、

$0 < a < 1$ のときは **ツ** である。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

チ の解答群

- | | |
|------------------------------------|--------------------------------|
| ② $0 < b < \frac{1}{a}, 1 < b < a$ | ① $0 < b < \frac{1}{a}, a < b$ |
| ② $\frac{1}{a} < b < 1, 1 < b < a$ | ③ $\frac{1}{a} < b < 1, a < b$ |

ツ の解答群

- | | |
|------------------------------------|--------------------------------|
| ② $0 < b < a, 1 < b < \frac{1}{a}$ | ① $0 < b < a, \frac{1}{a} < b$ |
| ② $a < b < 1, 1 < b < \frac{1}{a}$ | ③ $a < b < 1, \frac{1}{a} < b$ |

(4) $p = \frac{12}{13}, q = \frac{12}{11}, r = \frac{14}{13}$ とする。

次の①～④のうち、正しいものは テ である。

テ の解答群

- ① $\log_p q > \log_q p$ かつ $\log_p r > \log_r p$
- ② $\log_p q > \log_q p$ かつ $\log_p r < \log_r p$
- ③ $\log_p q < \log_q p$ かつ $\log_p r > \log_r p$
- ④ $\log_p q < \log_q p$ かつ $\log_p r < \log_r p$

数学Ⅱ

第2問 (配点 30)

[1] a を実数とし, $f(x) = x^3 - 6ax + 16$ とおく。

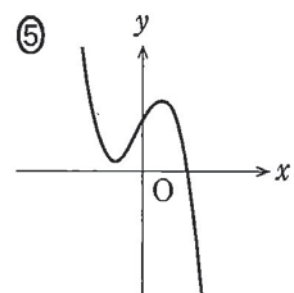
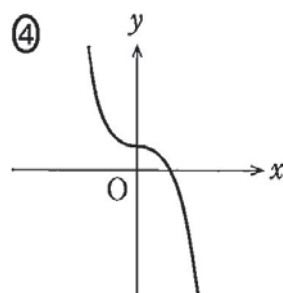
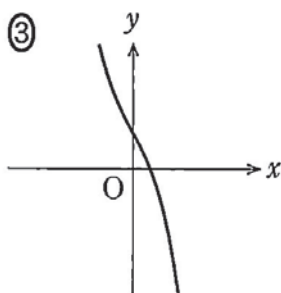
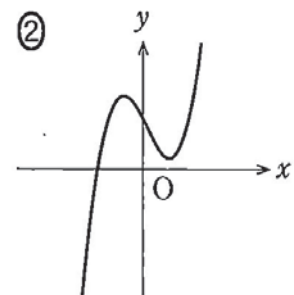
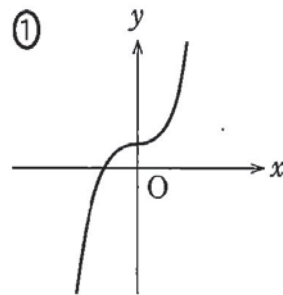
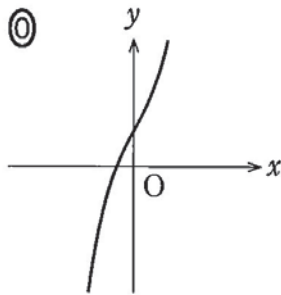
(1) $y = f(x)$ のグラフの概形は

$a = 0$ のとき,

$a < 0$ のとき,

である。

, については, 最も適当なものを, 次の①~⑤のうちから一つずつ選べ。ただし, 同じものを繰り返し選んでもよい。



(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

数学Ⅱ

(2) $a > 0$ とし、 p を実数とする。座標平面上の曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = p$ が3個の共有点をもつような p の値の範囲は $\boxed{\text{ウ}} < p < \boxed{\text{エ}}$ である。

$p = \boxed{\text{ウ}}$ のとき、曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = p$ は2個の共有点をもつ。それらの x 座標を q, r ($q < r$) とする。曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = p$ が点 (r, p) で接することに注意すると

$$q = \boxed{\text{オカ}} \sqrt{\boxed{\text{キ}}} a^{\frac{1}{2}}, \quad r = \sqrt{\boxed{\text{ク}}} a^{\frac{1}{2}}$$

と表せる。

$\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

- | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|
| ① $2\sqrt{2} a^{\frac{3}{2}} + 16$ | ⑥ $-2\sqrt{2} a^{\frac{3}{2}} + 16$ |
| ② $4\sqrt{2} a^{\frac{3}{2}} + 16$ | ⑦ $-4\sqrt{2} a^{\frac{3}{2}} + 16$ |
| ③ $8\sqrt{2} a^{\frac{3}{2}} + 16$ | ⑧ $-8\sqrt{2} a^{\frac{3}{2}} + 16$ |

(3) 方程式 $f(x) = 0$ の異なる実数解の個数を n とする。次の①～⑧のうち、正しいものは $\boxed{\text{ケ}}$ と $\boxed{\text{コ}}$ である。

$\boxed{\text{ケ}}$, $\boxed{\text{コ}}$ の解答群(解答の順序は問わない。)

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| ① $n = 1$ ならば $a < 0$ | ⑥ $a < 0$ ならば $n = 1$ |
| ② $n = 2$ ならば $a < 0$ | ⑦ $a < 0$ ならば $n = 2$ |
| ③ $n = 3$ ならば $a > 0$ | ⑧ $a > 0$ ならば $n = 3$ |

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

数学Ⅱ

- [2] $b > 0$ とし, $g(x) = x^3 - 3bx + 3b^2$, $h(x) = x^3 - x^2 + b^2$ とおく。座標平面上の曲線 $y = g(x)$ を C_1 , 曲線 $y = h(x)$ を C_2 とする。

C_1 と C_2 は 2 点で交わる。これらの交点の x 座標をそれぞれ α , β ($\alpha < \beta$) とすると, $\alpha = \boxed{\text{サ}}$, $\beta = \boxed{\text{シス}}$ である。

$\alpha \leq x \leq \beta$ の範囲で C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を S とする。また, $t > \beta$ とし, $\beta \leq x \leq t$ の範囲で C_1 と C_2 および直線 $x = t$ で囲まれた図形の面積を T とする。

このとき

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \boxed{\text{セ}} dx$$

$$T = \int_{\beta}^t \boxed{\text{ソ}} dx$$

$$S - T = \int_{\alpha}^t \boxed{\text{タ}} dx$$

であるので

$$S - T = \frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}} \left(2t^3 - \boxed{\text{ト}} bt^2 + \boxed{\text{ナニ}} b^2 t - \boxed{\text{ヌ}} b^3 \right)$$

が得られる。

したがって, $S = T$ となるのは $t = \frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}} b$ のときである。

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

セ ~ タ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

- | | | | |
|---|---------------------|---|---------------------|
| ① | $\{g(x) + h(x)\}$ | ① | $\{g(x) - h(x)\}$ |
| ② | $\{h(x) - g(x)\}$ | ③ | $\{2g(x) + 2h(x)\}$ |
| ④ | $\{2g(x) - 2h(x)\}$ | ⑤ | $\{2h(x) - 2g(x)\}$ |
| ⑥ | $2g(x)$ | ⑦ | $2h(x)$ |

数学Ⅱ

第3問 (配点 20)

$0 \leq \theta \leq \pi$ のとき

$$4 \cos 2\theta + 2 \cos \theta + 3 = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を満たす θ について考えよう。

(1) $t = \cos \theta$ とおくと、 t のとり得る値の範囲は $-1 \leq t \leq 1$ である。2倍角の公式により

$$\cos 2\theta = \boxed{\text{ア}} t^2 - \boxed{\text{イ}}$$

であるから、 $\textcircled{1}$ により、 t についての方程式

$$\boxed{\text{ウ}} t^2 + \boxed{\text{エ}} t - 1 = 0$$

が得られる。この方程式の解は

$$t = \frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}}, \frac{1}{4}$$

である。

(数学Ⅱ第3問は次ページに続く。)

以下、 $0 \leq \theta \leq \pi$ かつ $\cos \theta = \frac{\text{オカ}}{\text{キ}}$ を満たす θ を α とし、 $0 \leq \theta \leq \pi$

かつ $\cos \theta = \frac{1}{4}$ を満たす θ を β とする。

(2) $\cos \alpha = \frac{\text{オカ}}{\text{キ}}$ により、 $\alpha = \frac{\text{ク}}{\text{ケ}}\pi$ であることがわかる。そこで

β の値について調べてみよう。

$$\cos \beta = \frac{1}{4} \text{ と}$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \text{コ}, \quad \cos \frac{\pi}{4} = \text{サ}, \quad \cos \frac{\pi}{3} = \text{シ}$$

を比較することにより、 β は ス を満たすことがわかる。

$\text{コ} \sim \text{シ}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

- | | | |
|-------------------------|-------------------------|------------------------|
| ① 0 | ② 1 | ③ -1 |
| ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | ⑤ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | ⑥ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| ⑦ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | ⑧ $\frac{1}{2}$ | ⑨ $-\frac{1}{2}$ |

ス の解答群

- | | |
|---|---|
| ① $0 < \beta < \frac{\pi}{6}$ | ② $\frac{\pi}{6} < \beta < \frac{\pi}{4}$ |
| ③ $\frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{3}$ | ④ $\frac{\pi}{3} < \beta < \frac{\pi}{2}$ |

(数学Ⅱ第3問は次ページに続く。)

数学Ⅱ

(3) β の値について、さらに詳しく調べてみよう。

2倍角の公式を用いると

$$\cos 2\beta = \frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}, \quad \cos 4\beta = \frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$$

であることがわかる。さらに、座標平面上で 4β の動径は第 $\boxed{\text{ナ}}$ 象限にあり、 β は $\boxed{\text{ニ}}$ を満たすことがわかる。ただし、角の動径は x 軸の正の部分
を始線として考えるものとする。

$\boxed{\text{ニ}}$ の解答群

① $0 < \beta < \frac{\pi}{8}$

② $\frac{\pi}{8} < \beta < \frac{\pi}{6}$

③ $\frac{\pi}{6} < \beta < \frac{3}{16}\pi$

④ $\frac{3}{16}\pi < \beta < \frac{\pi}{4}$

⑤ $\frac{\pi}{4} < \beta < \frac{5}{16}\pi$

⑥ $\frac{5}{16}\pi < \beta < \frac{\pi}{3}$

⑦ $\frac{\pi}{3} < \beta < \frac{3}{8}\pi$

⑧ $\frac{3}{8}\pi < \beta < \frac{5}{12}\pi$

⑨ $\frac{5}{12}\pi < \beta < \frac{7}{16}\pi$

⑩ $\frac{7}{16}\pi < \beta < \frac{\pi}{2}$

(下書き用紙)

数学Ⅱの試験問題は次に続く。

数学Ⅱ

第4問 (配点 20)

m, n を実数とし、次の二つの整式 $P(x)$ と $Q(x)$ を考える。

$$P(x) = x^4 + (m - 1)x^3 + 5x^2 + (m - 3)x + n$$

$$Q(x) = x^2 - x + 2$$

また、 $P(x)$ は $Q(x)$ で割り切れるとし、 $P(x)$ を $Q(x)$ で割ったときの商を $R(x)$ とおく。

(1) 2次方程式 $Q(x) = 0$ の解は

$$x = \frac{\boxed{\text{ア}} \pm \sqrt{\boxed{\text{イ}}} i}{\boxed{\text{ウ}}}$$

である。

(2) $P(x)$ は $Q(x)$ で割り切れるから、 n を m を用いて表すと

$$n = \boxed{\text{エ}} m + \boxed{\text{オ}}$$

である。また

$$R(x) = x^2 + mx + m + \boxed{\text{カ}}$$

である。

(数学Ⅱ第4問は次ページに続く。)

- (3) 方程式 $R(x) = 0$ は異なる二つの虚数解 α, β をもつとする。このとき, m のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{キク}} < m < \boxed{\text{ケ}}$$

である。また

$$\alpha + \beta = \boxed{\text{コ}} m, \alpha\beta = m + \boxed{\text{サ}}$$

である。

いま, $\alpha\beta(\alpha + \beta) = -10$ であるとする。このとき, $m = \boxed{\text{シ}}$ であり, 方程式 $R(x) = 0$ の虚数解は

$$x = \boxed{\text{スセ}} \pm \boxed{\text{ソ}} i$$

である。

- (4) 方程式 $P(x) = 0$ の解について考える。

異なる解が全部で3個になるのは, $m = \boxed{\text{タチ}}, \boxed{\text{ツ}}$ のときであり, そのうち虚数解は $\boxed{\text{テ}}$ 個である。

異なる解が全部で2個になるのは, $m = \boxed{\text{トナ}}$ のときである。

異なる解が全部で4個になるのは, m の値が $\boxed{\text{タチ}}, \boxed{\text{ツ}}, \boxed{\text{トナ}}$ のいずれとも等しくないときであり, $m < \boxed{\text{タチ}}, \boxed{\text{ツ}} < m$ のとき, 4個の解のうち虚数解は $\boxed{\text{ニ}}$ 個である。

数学Ⅱ

(下書き用紙)