2022 年度大学入学共通テスト 解説〈数学Ⅰ・A〉

第 1 問

〔1〕　$a+b+c=1$ ……①，$a^2+b^2+c^2=13$ ……②

(1)　$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ と①，②より，

$$1^2=13+2(ab+bc+ca)$$

よって，

$$ab+bc+ca=\frac{1-13}{2}=\underline{\underline{-6}} \quad \cdots\cdots③$$
……アイ

また，

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)$$
$$=2\{(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)\}$$

であるから，②，③より，

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2\times\{13-(-6)\}=\underline{\underline{38}} \quad \cdots\cdots④$$
……ウエ

(2)　$a-b=2\sqrt{5}$ のとき，$b-c=x$，$c-a=y$ とおくと，

$$x+y=(b-c)+(c-a)=-a+b=-(a-b)=\underline{\underline{-2}}\sqrt{5} \quad \cdots\cdots⑤$$
……オカ

また，④より，

$$x^2+y^2=(b-c)^2+(c-a)^2=38-(a-b)^2=38-(2\sqrt{5})^2=38-20=\underline{\underline{18}} \quad \cdots\cdots⑥$$
……キク

よって，$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$ と⑤，⑥より，

$$(-2\sqrt{5})^2=18+2xy$$

であるから，

$$xy=\frac{20-18}{2}=1 \quad \cdots\cdots⑦$$

したがって，⑦より，

$$(a-b)(b-c)(c-a)=2\sqrt{5}xy=2\sqrt{5}\cdot1=\underline{\underline{2}}\sqrt{5}$$
……ケ

〔２〕 問題の図１において，AC＝x，BC＝y とおくと，$\tan\angle BAC=\dfrac{y}{x}=\tan 16^\circ=0.2867$

実際の長さは，AC＝100000x，BC＝25000y であるから，実際には，

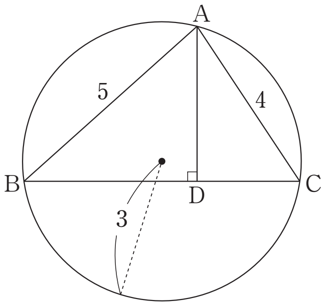
$$\tan\angle BAC=\frac{BC}{AC}=\frac{25000y}{100000x}=\frac{y}{4x}=\frac{1}{4}\times 0.2867=0.071675\fallingdotseq \underline{0}.\underline{072}$$ ……コ，サシス

三角比の表から，$\tan 4^\circ=0.0699$，$\tan 5^\circ=0.0875$ であり，$0.0699<0.072<0.0875$ であるから，

$\angle BAC$ の大きさは，4° より大きく 5° より小さい。(……②) ……セ

〔3〕

(1)　右の図のようになり，正弦定理より，



$$\frac{\mathrm{AC}}{\sin\angle\mathrm{ABC}}=2R\quad(R\text{ は }\triangle\mathrm{ABC}\text{ の外接円の半径})$$

であるから，

$$\sin\angle\mathrm{ABC}=\frac{\mathrm{AC}}{2R}=\frac{4}{2\cdot3}=\frac{2}{3}$$ ……ソ，タ

このとき，$\mathrm{AD}=\mathrm{AB}\sin\angle\mathrm{ABC}=5\times\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$ ……チツ，テ

(2)　$\mathrm{AB}=c$，$\mathrm{AC}=b$ とおくと，$2c+b=14$　　すなわち，$b=14-2c$ ……①

円の弦の長さは(値が正で)円の直径以下であるから，

$0<c\leqq6$　かつ　$0<b\leqq6$

よって，①より，

$0<c\leqq6$　かつ　$0<14-2c\leqq6$

$0<c\leqq6$　かつ　$4\leqq c<7$

であるから，

$4\leqq c\leqq6$ ……②　　すなわち，$4\leqq\mathrm{AB}\leqq6$ ……ト，ナ

また，(1)と同様に正弦定理より，

$$\sin\angle\mathrm{ABC}=\frac{\mathrm{AC}}{2R}=\frac{14-2c}{2\cdot3}=\frac{7-c}{3}$$

であるから，

$$\mathrm{AD}=\mathrm{AB}\sin\angle\mathrm{ABC}=c\cdot\frac{7-c}{3}$$

$$=\frac{-1}{3}c^2+\frac{7}{3}c$$

$$=\frac{-1}{3}\mathrm{AB}^2+\frac{7}{3}\mathrm{AB}$$ ……ニヌ，ネ，ノ，ハ

さらに，

$$\mathrm{AD}=-\frac{1}{3}(c^2-7c)=-\frac{1}{3}\left\{\left(c-\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2\right\}=-\frac{1}{3}\left(c-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{49}{12}$$

であるから，②のもとで，AD は $c=4$ のとき最大値 4 をとる。 ……ヒ

第 2 問

〔1〕　$x^2+px+q=0$ ……①，$x^2+qx+p=0$ ……②

(1)　$p=4$，$q=-4$ のとき，①，②の解はそれぞれ，

$x^2+4x-4=0$　より，$x=-2\pm2\sqrt{2}$

$x^2-4x+4=0$　$(x-2)^2=0$　より，$x=2$

であるから，$n=\underline{\underline{3}}$ ……ア

また，$p=1$，$q=-2$ のとき，①，②の解はそれぞれ，

$x^2+x-2=0$　$(x+2)(x-1)=0$　より，$x=-2,\ 1$

$x^2-2x+1=0$　$(x-1)^2=0$　より，$x=1$

であるから，$n=\underline{\underline{2}}$ ……イ

(2)　$p=-6$ のとき，①，②はそれぞれ，

$x^2-6x+q=0$ ……①，$x^2+qx-6=0$ ……②

①，②をともに満たす実数 x があるとき，それを α とすると，

$\alpha^2-6\alpha+q=0$ ……①′，$\alpha^2+q\alpha-6=0$ ……②′

ここで，②′−①′ より，$(q+6)\alpha-(q+6)=0$　すなわち，$(q+6)(\alpha-1)=0$

これより，$q=-6$ または $\alpha=1$ であるが，$q=-6$ とすると，$p=q$ となり，①と②が一致してしまい，$n\leqq2$ となるから，$q\neq-6$

よって，$\alpha=1$ であり，このとき①′ より，$1^2-6\cdot1+q=0$　すなわち，$q=5$

このとき，①，②の解はそれぞれ，

$x^2-6x+5=0$　$(x-1)(x-5)=0$　より，$x=1,\ 5$

$x^2+5x-6=0$　$(x+6)(x-1)=0$　より，$x=-6,\ 1$

となり，確かに $n=3$ となる。

上以外に $n=3$ となるのは，①，②のいずれか一方が重解をもち，他方がこの重解と異なる 2 つの解をもつ場合である。

①が重解をもつとき，

$$\frac{(\text{①の判別式})}{4}=(-3)^2-q=9-q=0 \quad \text{より，}q=9$$

このとき，①，②の解はそれぞれ，

$x^2-6x+9=0$　$(x-3)^2=0$　より，$x=3$

$x^2+9x-6=0$　$x=\dfrac{-9\pm\sqrt{105}}{2}$

となり，確かに $n=3$ となる。

また，

$(\text{②の判別式})=q^2+24\neq0$

であるから，②が実数の重解をもつことはない。

以上から，求める q の値は，

$q=5$，9 ……ウ，エ

(3)　$p=-6$ に固定したまま，q の値だけ変化させる。

$$y=x^2-6x+q=(x-3)^2+q-9 \quad ……③$$

$$y=x^2+qx-6=\left(x+\frac{q}{2}\right)^2-\frac{q^2}{4}-6 \quad ……④$$

これより，③のグラフの頂点は $(3,\ q-9)$，④のグラフの頂点は $\left(-\frac{q}{2},\ -\frac{q^2}{4}-6\right)$ であるから，q の値を 1 から増加させたとき，

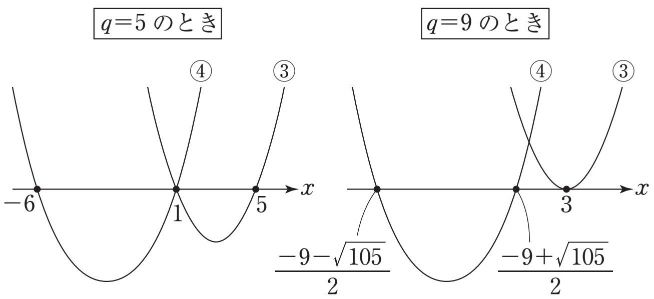
③のグラフの頂点の x 座標は一定で，y 座標は増加するから，グラフ全体は上方に動く。

⑥ ……オ

④のグラフの頂点の x 座標も y 座標も減少するから，グラフ全体は左下方に動く。

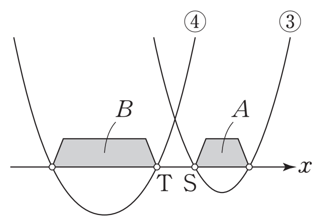
① ……カ

(4)　(2)における考察から，$q=5$，$q=9$ のそれぞれにおける関数③，④のグラフは，右の図のようになる。



③のグラフと x 軸の交点のうち，左側の点を S，④のグラフと x 軸の交点のうち，右側の点を T とすると，q が 5 から 9 まで動く途中で，S と T が一致することはない（$n=3$ となる q は，5 と 9 以外にない）から，つねに S は T よりも右方にある。

よって，集合 A，B の関係は，右図のようになることがわかる。



このとき，「$x\in A$ ならば $x\in B$」も「$x\in B$ ならば $x\in A$」も偽であるから，$x\in A$ は $x\in B$ であるための

必要条件でも十分条件でもない。（……③） ……キ

また，「$x\in B$ ならば $x\in\overline{A}$」は真であるが，「$x\in\overline{A}$ ならば $x\in B$」は偽であるから，$x\in B$ は $x\in\overline{A}$ であるための

十分条件であるが，必要条件ではない。（……①） ……ク

〔2〕

(1)　29個のデータを小さい方から並べたとき，「中央値」は初めから15番目のデータである。

また，中央値のデータより下位の14個のデータの中央値である「第1四分位数」は，小さい方から7番目と8番目のデータの平均となる。さらに，「第3四分位数」は，大きい方から7番目と8番目のデータの平均となる。

また，「範囲」はデータの最大値と最小値の差であり，「四分位範囲」は第3四分位数と第1四分位数の差である。

以上をもとに，2009年度と2018年度におけるヒストグラムを比べると，

- 「中央値」を含む階級は，2009年度も2018年度も「30人以上45人未満」(以下，「30〜45」と記す)で等しい。(②)　……ケ
- 「第1四分位数」を含む階級は，2009年度も2018年度も「15〜30」で等しい。(②)　……コ
- 「第3四分位数」を含む階級は，2009年度が「60〜75」，2018年度が「45〜60」で，2018年度の方が小さい。(⓪)　……サ
- 「範囲」は，2009年度が(165−29＝)136人以上，2018年度が(134−0＝)134人以下で，2018年度の方が小さい。(⓪)　……シ
- 「四分位範囲」は，2009年度が(60−29＝)31人以上(74−15＝)59人以下，2018年度が(45−29＝)16人以上(59−15＝)44人以下で，これだけでは両者の大小を判断できない。(③)　……ス

(2)　箱ひげ図から，教育機関1機関あたりの学習者数の，

a）中央値は150人未満，b）第1四分位数は100人未満，

c）第3四分位数は250人未満，d）最大値は450人以上

であることが読み取れる。

これと散布図を照らし合わせると，(1)の……部により，

- ⓪は，250人以上のデータが8個あるから，cに反する。
- ①は，最大値が450人未満であるから，dに反する。
- ②は，100人以下のデータが9個，150人以下のデータが18個，大きい方から7番目と8番目のデータの平均が250人未満であり，すべてに合致する。
- ③は，100人以下のデータが6個あるから，bに反する。

以上により，答えは ②　……セ

⑶　S と T の相関係数は，$\dfrac{S\text{と}T\text{の共分散}}{(S\text{の標準偏差})\times(T\text{の標準偏差})}$ で得られるから，

$$\frac{735.3}{39.3\times29.9}=\frac{735.3}{1175.07}=0.625\cdots\cdots\fallingdotseq\underline{\underline{0}}.\underline{\underline{63}}$$
……ソ，タチ

⑷　⑶で求めた相関係数の値は，S と T の間にやや強い相関があることを示すから，適する散布図は①か③である。このうち①の散布図を見ると，T の値が 80 を超えるデータが 20 個あり，80 を下回る 9 個のデータの分布から見て，T の平均値は明らかに 80 を超えるから，72.9 であることはあり得ない。よって，最も適当な散布図は③である。　……ツ

第３問

複数人の A，B，C，…… がそれぞれプレゼント a，b，c，…… を持ち寄るとし，A が b を，B が a を受け取ることを，$(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=(b,\ a)$ のように表すことにする。

(1)

(i)　A，B の２人で交換会を開くとすると，１回目の交換で終了するような受け取り方は，

$(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=(b,\ a)$ の $\underline{\underline{1}}$ 通り　……①　ある。　……ア

１回の交換の方法は，全部で $2!=2\cdot1=2$（通り）あり，これらは同様に確からしいから，１回目の交換で交換会が終了する確率は，$\underline{\underline{\dfrac{1}{2}}}$　……イ，ウ

(ii)　A，B，C の３人で交換会を開くとすると，１回目の交換で終了するような受け取り方は，

$(\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C})=(b,\ c,\ a)$，$(c,\ a,\ b)$ の $\underline{\underline{2}}$ 通り　……②　ある。　……エ

１回の交換の方法は，全部で $3!=3\cdot2\cdot1=6$（通り）あり，これらは同様に確からしいから，１回目の交換で交換会が終了する確率は，$\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{\underline{\underline{3}}}$　……オ，カ

(iii)　３人で交換会を開く場合，初めから４回連続で終了しない確率は，

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)^4=\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$$

であるから，４回以下の交換で交換会が終了する確率は，$1-\dfrac{16}{81}=\underline{\underline{\dfrac{65}{81}}}$　……キク，ケコ

(2)　４人で交換会を開く場合，１回目の交換で，

- ４人のうち，ちょうど１人が自分のプレゼントを受け取る場合は，
  その１人の選び方が ${}_4\mathrm{C}_1=4$（通り），残りの３人の受け取り方は，②の２通りであるから，
  $4\times2=\underline{\underline{8}}$（通り）　……サ
- ４人のうち，ちょうど２人が自分のプレゼントを受け取る場合は，
  その２人の選び方が ${}_4\mathrm{C}_2=\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}=6$（通り），残りの２人の受け取り方は，①の１通りであるから，
  $6\times1=\underline{\underline{6}}$（通り）　……シ
- ４人のうち，３人が自分のプレゼントを受け取る場合は，４人が４人とも自分のプレゼントを受け取る場合であるから，１通り。

以上により，１回目の交換で交換会が終了しない場合は，$8+6+1=\underline{\underline{15}}$（通り）である。……スセ

１回の交換の方法は，全部で $4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$（通り）あり，これらは同様に確からしい。

１回目の交換で交換会が終了する場合は，$24-15=9$（通り）　……④　であるから，その確率は，

$\dfrac{9}{24}=\dfrac{3}{\underline{\underline{8}}}$　……ソ，タ

(3)　5人で交換会を開く場合，1回目の交換で，

- 5人のうち，ちょうど1人が自分のプレゼントを受け取る場合は，
  その1人の選び方が ${}_5C_1=5$（通り），残りの4人の受け取り方は，④の9通りであるから，
  $5\times9=45$（通り）
- 5人のうち，ちょうど2人が自分のプレゼントを受け取る場合は，
  その2人の選び方が ${}_5C_2=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$（通り），残りの3人の受け取り方は，②の2通りであるから，
  $10\times2=20$（通り）
- 5人のうち，ちょうど3人が自分のプレゼントを受け取る場合は，
  その3人の選び方が ${}_5C_3={}_5C_2=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$（通り），残りの2人の受け取り方は，①の1通りであるから，
  $10\times1=10$（通り）
- 5人のうち，4人が自分のプレゼントを受け取る場合は，5人が5人とも自分のプレゼントを受け取る場合であるから，1通り。

以上により，1回目の交換で交換会が終了しない場合は，$45+20+10+1=76$（通り）である。

1回の交換の方法は，全部で $5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$（通り）あり，これらは同様に確からしい。

1回目の交換で交換会が終了する場合は，$120-76=44$（通り）　……⑤　であるから，その確率は，$\dfrac{44}{120}=\underline{\underline{\dfrac{11}{30}}}$　……チツ，テト

(4)　A，B，C，D，Eの5人で交換会を開くとき，1回目の交換でA，B，C，Dがそれぞれ自分以外のプレゼントを受け取る場合は，

Eが e を受け取ってA，B，C，Dがそれぞれ自分以外のプレゼントを受け取る場合(④)と，
A，B，C，D，Eがみなそれぞれ自分以外のプレゼントを受け取る場合(⑤)の，
$9+44=53$（通り）

このうち，1回目の交換で交換会が終了する場合は，⑤の44通りであるから，求める条件付き確率は，$\underline{\underline{\dfrac{44}{53}}}$　……ナニ，ヌネ

第 4 問

(1)　$5^4=625$ を $2^4=16$ で割ったときの商は 39，余りは 1 であるから，

$5^4=2^4\cdot 39+1$　……③　　すなわち，$5^4\cdot 1-2^4\cdot 39=1$　……④

よって，$5^4x-2^4y=1$　……①　の整数解のうち，x が正の整数で最小になるのは，

$x=\underline{\underline{1}}$，$y=\underline{\underline{39}}$　……ア，イウ

のときである。

また，①−④より，

$5^4(x-1)-2^4(y-39)=0$　　すなわち，$5^4(x-1)=2^4(y-39)$

5^4 と 2^4 は互いに素であるから，

$x-1=2^4k$，$y-39=5^4k$　（k は整数）

とおける。

よって，x が 2 桁の正の整数で最小になるのは，$k=1$ のときで，このとき，

$x=\underline{\underline{17}}$，$y=\underline{\underline{664}}$　……エオ，カキク

(2)　$625^2=(5^4)^2=5^{\underline{\underline{8}}}$　……ケ

であるから，③で $m=39$ とした式を代入すると，

$625^2=(5^4)^2=(2^4m+1)^2=(2^4m)^2+2\cdot 2^4m\cdot 1+1^2=2^8m^2+2^{\underline{\underline{5}}}m+1$　……コ

これより，$625^2\ (=5^8)$ を 5^5 で割ったときの余りは 0，2^5 で割ったときの余りは 1 である。

(3)　次に，$5^5x-2^5y=1$　……②　の整数解について調べる。

②より，$5^5x=2^5y+1$ であるから，5^5x を 5^5 で割ったときの余りは 0，2^5 で割ったときの余りは 1 である。

よって，2 つの ……… 部より，5^5x-625^2 は 5^5 でも 2^5 でも割り切れる。

ここで，5^5 と 2^5 は互いに素なので，5^5x-625^2 は $5^5\cdot 2^5$ の倍数，つまり，

$5^5x-625^2=5^5\cdot 2^5l$（l は整数）　……⑤　とおける。

⑤の両辺を 5^5 で割ると，$x-5^3=2^5l$ であるから，②の整数解のうち，x が 3 桁の正の整数で最小になるのは，$l=0$ のときで，このとき，$x=\underline{\underline{125}}$　……サシス

このとき，②より，

$5^5\cdot 125-2^5y=1$

$390625-32y=1$

$y=\underline{\underline{12207}}$　……セソタチツ

(4)　$11^5x-2^5y=1$　……⑥　の整数解について調べる。(1)〜(3)と同様の流れで考える。

$11^4=14641$ を $2^4=16$ で割ることより，$14641=16\cdot 915+1$ であるから，

$11^4=2^4\cdot 915+1$　……⑦

ここで，$n=915$ とおくと，⑦は，$11^4=2^4n+1$

$11^8=(11^4)^2=(2^4n+1)^2=(2^4n)^2+2\cdot 2^4n\cdot 1+1^2=2^8n^2+2^5n+1$

よって，$14641^2\,(=11^8)$ を 11^5 で割ったときの余りは0，2^5 で割ったときの余りは1である。

また，⑥より，11^5x を 11^5 で割ったときの余りは0，2^5 で割ったときの余りは1である。

これより，11^5x-11^8 は 11^5 でも 2^5 でも割り切れ，さらに 11^5 と 2^5 は互いに素なので，11^5x-11^8 は $11^5\cdot 2^5$ の倍数，つまり，$11^5x-11^8=11^5\cdot 2^5j$（$j$ は整数）とおける。

この両辺を 11^5 で割ると，$x-11^3=2^5j$ であるから，

$x=11^3+2^5j=1331+32j$　……⑧

ここで，$1331=32\cdot 41+19$ より，⑧を満たす最小の正の整数 x は，$j=-41$ のときで，$x=\underline{\underline{19}}$

……テト

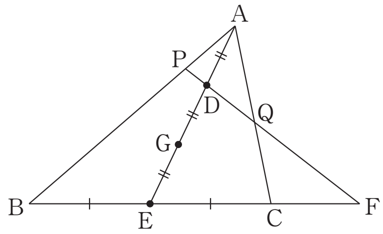
このとき，⑥より，$11^5\cdot 19-2^5y=1$

$3059969-32y=1$

$y=\underline{\underline{95624}}$　……ナニヌネノ

第 5 問

(1)　点の位置関係は右の図のようになる。



点 G は △ABC の重心であるから，AG：GE＝2：1

これと点 D が線分 AG の中点であることから，

$$\mathrm{AD}=\frac{1}{2}\mathrm{AG}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\mathrm{AE}=\frac{1}{3}\mathrm{AE}$$

であり，

$$\mathrm{DE}=\mathrm{AE}-\mathrm{AD}=\frac{2}{3}\mathrm{AE}$$

よって，

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DE}}=\frac{\frac{1}{3}\mathrm{AE}}{\frac{2}{3}\mathrm{AE}}=\frac{1}{2}$$ ……ア，イ

△ABE と直線 PD に関するメネラウスの定理より，

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DE}}\cdot\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FB}}=1$$

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{BF}}=1$$

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}=2\times\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{EF}}\quad(\cdots\cdots①,\ ③)\quad\cdots\cdots①$$ ……ウ，エ，オ

△AEC と直線 DQ に関するメネラウスの定理より，

$$\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DE}}\cdot\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FC}}=1$$

$$\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{CF}}=1$$

$$\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}}=2\times\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{EF}}\quad(\cdots\cdots②,\ ③)\quad\cdots\cdots②$$ ……カ，キ，ク

①＋②より，

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}+\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}}=2\times\left(\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{EF}}+\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{EF}}\right)=2\times\frac{\mathrm{BF}+\mathrm{CF}}{\mathrm{EF}}$$

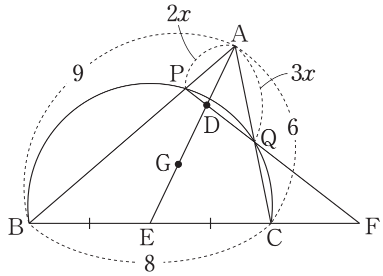
ここで，点 E は辺 BC の中点であるから，BF＋CF＝2EF

よって，

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}+\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}}=2\times2=4\quad\cdots\cdots③$$ ……ケ

(注)　点 F を辺 BC の B の側の延長上にとっても，全く同様の式変形となる。(3)も同様。

(2)　点の位置関係は右の図のようになる。



方べきの定理より，

$$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AB}=\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{AC}$$

であるから，

$$\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AP}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$

すなわち，

$$\mathrm{AQ}=\frac{\underline{\underline{3}}}{\underline{\underline{2}}}\mathrm{AP}$$ ……コ，サ

AP＝$2x$ とおくと，AQ＝$3x$ であるから，③より，

$$\frac{9-2x}{2x}+\frac{6-3x}{3x}=4$$

$$3(9-2x)+2(6-3x)=24x$$

$$x=\frac{13}{12}$$

よって，

$$\mathrm{AP}=2x=\frac{\underline{\underline{13}}}{\underline{\underline{6}}},\quad \mathrm{AQ}=3x=\frac{\underline{\underline{13}}}{\underline{\underline{4}}}$$ ……シス，セ，ソタ，チ

このとき，$\mathrm{BP}:\mathrm{PA}=\left(9-\frac{13}{6}\right):\frac{13}{6}=41:13$ であるから，CF＝y とおくと，①より，

$$\frac{41}{13}=2\times\frac{8+y}{4+y}$$

これより，

$$26(8+y)=41(4+y)$$

$$208+26y=164+41y$$

よって，

$$\mathrm{CF}=y=\frac{\underline{\underline{44}}}{\underline{\underline{15}}}$$ ……ツテ，トナ

(注)　点 F が辺 BC の C の側の延長上にあることは，次のように示すことができる。

AB＞AC より，∠ACB＞∠ABC

ここで，∠ACB＝α，∠ABC＝β とおくと，四角形 BCQP が円に内接することから，

$$\angle\mathrm{APQ}=\angle\mathrm{ACB}=\alpha$$

であり，$\alpha>\beta$ より，

$$\angle\mathrm{APQ}>\angle\mathrm{ABC}$$

よって，直線 PQ と直線 BC の交点は辺 BC の C の側の延長上にあるから，点 F は辺 BC の C の側の延長上にある。

(3) $\dfrac{AD}{DE}=k$ とおくと，①，②と同様にして，

$$\frac{BP}{AP}=\frac{1}{k}\times\frac{BF}{EF},\quad \frac{CQ}{AQ}=\frac{1}{k}\times\frac{CF}{EF}$$

であるから，

$$\frac{BP}{AP}+\frac{CQ}{AQ}=\frac{1}{k}\times\frac{BF+CF}{EF}=\frac{2}{k}$$

よって，$\dfrac{BP}{AP}+\dfrac{CQ}{AQ}=10$ となるのは，

$$\frac{2}{k}=10$$

より，

$$k=\frac{1}{5}$$

のときであるから，

$$AD=\frac{1}{1+5}AE=\frac{1}{6}AE$$

$$DG=AG-AD=\frac{2}{3}AE-\frac{1}{6}AE=\frac{1}{2}AE$$

したがって，題意を満たすのは，

$$\frac{AD}{DG}=\frac{\frac{1}{6}AE}{\frac{1}{2}AE}=\underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$ ……ニ，ヌ

のときである。