2022年度大学入学共通テスト 解説〈数学Ⅱ・B〉

第1問

〔1〕

(1) $x^2+y^2-4x-10y+4=0$ について考えると,

$$(x-2)^2+(y-5)^2=5^2$$

よって，この図形は，中心が $(2,\ 5)$，半径が 5 の円を表す。

これより,

$$D:(x-2)^2+(y-5)^2 \leqq 5$$

は，中心が点 Q(2, 5)，半径が 5 の円の周および内部。(……③)　　　……ア，イ，ウ，エ

(2)

(i)　$C:x^2+y^2-4x-10y+4=0$

を図示すると，(1)より右図のようになるから,

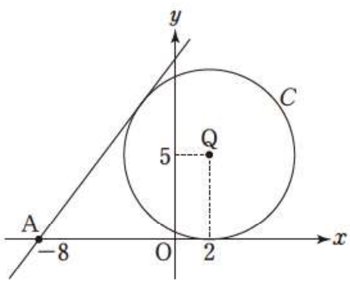
x 軸，つまり，$y=0$　　　……オ

は点 A$(-8,\ 0)$ を通る C の接線の一つとなる。

次に，A を通る C のもう一つの接線について,

$$l:y=k(x+8)$$

として



(ii) l を C の式に代入する場合(太郎さんの求め方)

$y=k(x+8)$ を $x^2+y^2-4x-10y+4=0$ に代入すると，x についての2次方程式

$$x^2+k^2(x+8)^2-4x-10k(x+8)+4=0$$

$$(k^2+1)x^2+(16k^2-10k-4)x+64k^2-80k+4=0$$

を得るので，これが，重解をもつときの k の値が接線の傾きとなる。(……⓪)　　　……カ

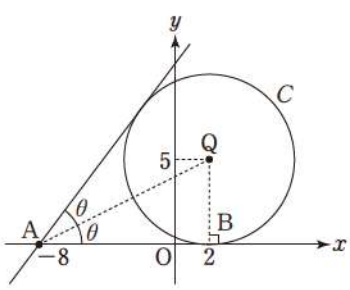
(iii) x 軸と AQ のなす角のタンジェントに着目する場合(花子さんの求め方)

x 軸と直線 AQ のなす角を θ $\left(0<\theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とし，中心 Q の x 座標を点 B とすると，右図より,

$$\tan\theta=\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{AB}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$　　　……キ，ク

であり，$y=0$ と異なる接線の傾きは，右図より,

$\tan 2\theta$　(……①)　　　……ケ



(iv) Aを通るCの接線のうち，$y=0$と異なる接線の傾きk_0は，(ii)の考え方のとき，xについての2次方程式

$$(k^2+1)x^2+2(8k^2-5k-2)x+64k^2-80k+4=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

の判別式の値が0のとき，(＊)は重解をもつので，

$$\frac{((*)\text{の判別式})}{4}=(8k^2-5k-2)^2-(k^2+1)(64k^2-80k+4)=0$$

つまり，

$$75k^2-100k=0 \quad \text{これを解いて } k=0,\ \frac{4}{3}$$

となり，$k_0=\underline{\underline{\frac{4}{3}}}$ であることがわかる。　　……コ，サ

(iii)の考え方のとき，tanについての2倍角の公式から，

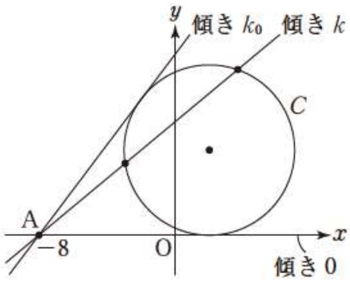
$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

が成り立つので，$\tan\theta=\frac{1}{2}$ より，

$$k_0=\tan 2\theta=\frac{2\times\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$　　……コ，サ

また，直線lと領域Dが共有点をもつようなkの値の範囲は，右図より，

$0\leqq k\leqq k_0$ （……⑤）　　……シ



〔2〕

(1)　$\log_3 9=\log_3 3^2=2\log_3 3=\underline{\underline{2}}$ ……ス

また，底の変換公式より，

$$\log_9 3=\frac{\log_3 3}{\log_3 9}=\frac{1}{2}$$

よって，$\log_3 9>\log_9 3$ が成り立つ。

また，対数の定義より，

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}=\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\right\}^{\frac{3}{2}}=4^{\frac{3}{2}}=(2^2)^{\frac{3}{2}}=2^3=8$$

より，

$\log_{\frac{1}{4}}\underline{\underline{8}}=-\dfrac{3}{2}$ ……セ

$$\log_8\frac{1}{4}=\frac{\log_2\frac{1}{4}}{\log_2 8}=-\frac{2}{3}$$

よって，$\log_8\dfrac{1}{4}>\log_{\frac{1}{4}}8$ が成り立つ。

(2)　$\log_a b=t$　……①　とおくと，

$\log_b a=\dfrac{1}{t}$　……②　が成り立つことは，次のようにして確かめられる。

①により，a を底とする対数の定義から，$a^t=b$　(……$\underline{\underline{①}}$) ……ソ

であり，この両辺を $\dfrac{1}{t}$ 乗して，

$$(a^t)^{\frac{1}{t}}=b^{\frac{1}{t}}$$

$$a^{t\cdot\frac{1}{t}}=b^{\frac{1}{t}}$$

$a=b^{\frac{1}{t}}$　(……$\underline{\underline{①}}$) ……タ

よって，b を底とする a の対数が $\dfrac{1}{t}$ であるから $\log_b a=\dfrac{1}{t}$，つまり②が成り立つ。

(3)　$t>\dfrac{1}{t}$　……③　を満たす実数 $t\ (t\neq 0)$ の値の範囲は，

$t>0$ ならば，両辺に t をかけて，$t^2>1$ であり，$t>0$ かつ $t<-1$，$1<t$ より，

$1<t$　……④　である。

$t<0$ ならば，両辺に t をかけて，$t^2<1$ であり，$t<0$ かつ $-1<t<1$ より，

$-1<t<0$　……⑤　である。

から，③を満たす t の値の範囲は，

$-1<t<0$　または　$1<t$

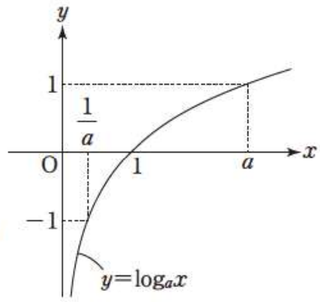
であることがわかる。

ここで，a の値を一つ定めたときの不等式

$\log_a b > \log_b a$　……⑥

について，

(i)　$a>1$ のとき



$b>1$ ならば，①より，$t>0$ であるから，④より，$t>1$

すなわち，$\log_a b>1$ より，$a<b$

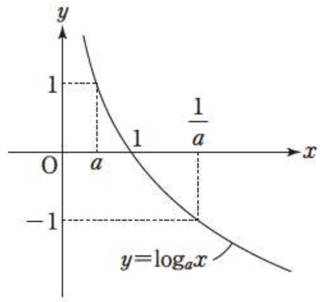
したがって，$1<a<b$

$0<b<1$ ならば，①より，$t<0$ であるから，⑤より，$-1<t<0$

すなわち，$-1<\log_a b<0$ より，$\dfrac{1}{a}<b<1$

以上から，$a>1$ のときは，$\dfrac{1}{a}<b<1$，$a<b$　(……③)　……チ

(ii)　$0<a<1$ のとき



$b>1$ ならば，①より，$t<0$ であるから，⑤より，$-1<t<0$

すなわち，$-1<\log_a b<0$ より，$1<b<\dfrac{1}{a}$

$0<b<1$ ならば，①より，$t>0$ であるから，④より，$1<t$

すなわち，$1<\log_a b$ より，$b<a$

以上から，$0<a<1$ のときは，$0<b<a$，$1<b<\dfrac{1}{a}$　(……⓪)　……ツ

(4)　$p=\dfrac{12}{13}<1$，$q=1+\dfrac{1}{11}$，$r=1+\dfrac{1}{13}$ より，$0<p<1<r<q$

さらに，

$$pq=\frac{12}{13}\times\frac{12}{11}=\frac{144}{143}>1 \text{ より，} \frac{1}{p}<q$$

$$pr=\frac{12}{13}\times\frac{14}{13}=\frac{168}{169}<1 \text{ より，} r<\frac{1}{p}$$

が成り立つ。

$0<p<1$ に注意すると，$\log_p q>\log_q p$ が成り立つのは，(3)で $a=p$，$b=q$ として，

$0<q<p$　または　$1<q<\dfrac{1}{p}$

のときであるが，p，q はこのどちらも満たさないので，$\log_p q<\log_q p$

さらに，$\log_p r>\log_r p$ が成り立つのは，(3)で $a=p$，$b=r$ として，

$0<r<p$　または　$1<r<\dfrac{1}{p}$

のときである。p，r は $1<r<\dfrac{1}{p}$ を満たすので，$\log_p r>\log_r p$

以上より，題意の p，q，r について，

$\log_p q < \log_q p$　かつ　$\log_p r > \log_r p$　（……②）　……テ

が成り立つ。

第2問

〔1〕

(1)　$y=f(x)=x^3-6ax+16$ に対して,

$$f'(x)=3x^2-6a$$

よって，$a=0$ のときは $f'(x)=3x^2 \geqq 0$ で，$x=0$ のときのみ $f'(x)=0$ となる。

これより $f(x)$ は単調増加関数で，点 $(0,\ 16)$ での接線の傾きが $f'(0)=0$ と合わせて，$y=f(x)$ のグラフは図1のようになる。(……①)　……ア

図1

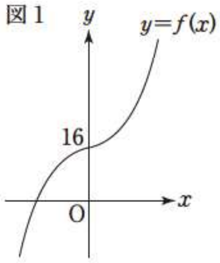
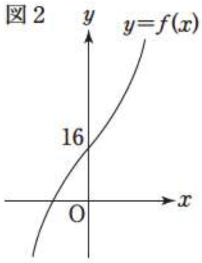


図2



また，$a<0$ のときは $-6a>0$ より,

$$f'(x)=3x^2-6a>0$$

これより $f(x)$ は単調増加関数で，点 $(0,\ 16)$ での接線の傾きが $f'(0)=-6a>0$ と合わせて，$y=f(x)$ のグラフは図2のようになる。(……⓪)

……イ

(2)　$a>0$ のとき，(1)より,

$$f'(x)=3(x^2-2a)$$

から，$f'(x)=0$ となる x は $x^2-2a=0$

より $x=\pm\sqrt{2a}$

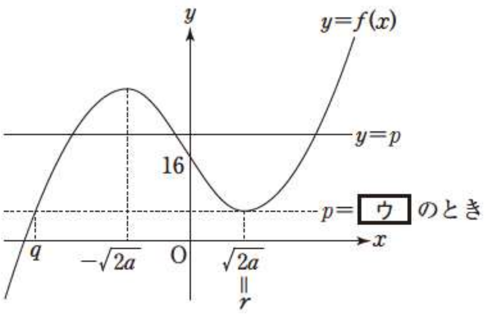
よって，$f(x)$ の増減表は右のようになり,

x	$\cdots$	$-\sqrt{2a}$	$\cdots$	$\sqrt{2a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

$$f(-\sqrt{2a})=(-\sqrt{2a})^3-6a(-\sqrt{2a})+16=4\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16$$

$$f(\sqrt{2a})=(\sqrt{2a})^3-6a\sqrt{2a}+16=-4\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16$$

から，$y=f(x)$ のグラフは右のようになる。



これと $y=p$ が3個の共有点をもつような p の値の範囲は,

$$-4\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16<p<4\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16$$

(……③$<p<$②)　……ウ，エ

$p=-4\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16$ のとき，$y=f(x)$ と $y=p$ は2個の共有点をもち，その x 座標が q, r $(q<r)$ である。

$y=f(x)$ と $y=p$ が点 $(r,\ p)$ で接することから,

$$f(x)=p \quad つまり \quad x^3-6ax+16-p=0$$

は r を2重解にもつ。したがって，3次方程式の解と係数の関係から,

$$q+r+r=0 \quad つまり \quad q=-2r$$

これと図より，$q=-2\sqrt{2}\,a^{\frac{1}{2}}$，$r=\sqrt{2}\,a^{\frac{1}{2}}$ と表せる。　……オカ，キ，ク

(3) 方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解の個数 n は(1)より，$a<0$ ならば $n=1$ であることがわかる。

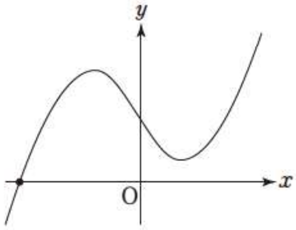
また，$n=3$ となることが起こるのは $a>0$ のときであるから $n=3$ ならば $a>0$ が言えることがわかる。

以上より，正しい記述は ① と ④。　……ケ，コ

(注) $n=1$ であっても，$a>0$ かつ $f(\sqrt{2a})=-4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}+16>0$ となるときもあるので，$n=1$ ならば $a<0$ は偽 (⓪は偽)，

(2)の後半のように $a>0$ であっても $f(\sqrt{2a})=0$ だと $n=2$ となるので，$n=2$ ならば $a<0$ は偽 (②は偽)，

また，(1)から $a<0$ ならば $n=2$ も偽 (③は偽)，



最後に，$a>0$ であっても $n=2$ となることも $n=1$ となることもあるので，$a>0$ ならば $n=3$ は偽 (⑤は偽) となる。

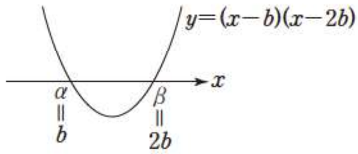
〔2〕　$g(x)-h(x)=x^3-3bx+3b^2-(x^3-x^2+b^2)$

$$=x^2-3bx+2b^2$$

$$=(x-b)(x-2b)$$

よって，C_1 と C_2 の 2 交点は，$(x-b)(x-2b)=0$ より $x=b,\ 2b$

$b>0$ と $\alpha<\beta$ に注意して，$\alpha=b$，$\beta=2b$　……サ，シス

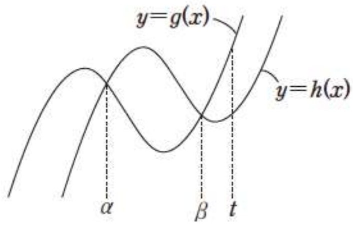


特に $\alpha\leqq x\leqq\beta$ において $(x-b)(x-2b)\leqq 0$

であるから，

$\alpha\leqq x\leqq\beta$ において，$g(x)\leqq h(x)$ であることに注意すると，

右のグラフから，



$$S=\int_\alpha^\beta\{h(x)-g(x)\}\,dx\quad(\cdots\cdots②)$$ ……セ

$$T=\int_\beta^t\{g(x)-h(x)\}\,dx\quad(\cdots\cdots①)$$ ……ソ

よって，

$$S-T=\int_\alpha^\beta\{h(x)-g(x)\}dx-\int_\beta^t\{g(x)-h(x)\}dx$$

$$=\int_\alpha^\beta\{h(x)-g(x)\}dx+\int_\beta^t\{h(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_\alpha^t\{h(x)-g(x)\}\,dx\quad(\cdots\cdots②)$$ ……タ

であるので，

$$S-T=\int_b^t(-x^2+3bx-2b^2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}bx^2-2b^2x\right]_b^t$$

$$=-\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}bt^2-2b^2t-\left(-\frac{1}{3}b^3+\frac{3}{2}b^3-2b^3\right)$$

$$=\frac{-1}{6}(2t^3-9bt^2+12b^2t-5b^3)$$ ……チツ，テ，ト，ナニ，ヌ

つまり，

$$S-T=-\frac{1}{6}(2t-5b)(t^2-2bt+b^2)$$

$$=-\frac{1}{6}(2t-5b)(t-b)^2$$

であるから，$S=T$　つまり $S-T=0$ となる t は $\alpha=b<\beta<t$ より，$t=\dfrac{5}{2}b$ のときである。

……ネ，ノ

第3問

(1)　A地区で収穫されるジャガイモのうち，重さが200 gを超えるものが25 %，つまり確率0.25で含まれていることがわかっている。400個のジャガイモを無作為に抽出したとき，重さが200 gを超えるジャガイモの個数を表す確率変数を Z としたとき，Z は二項分布

$B(400,\ 0.\underline{\underline{25}})$ ……アイ

に従うから，Z の平均(期待値)は $400\times0.25=\underline{\underline{100}}$ である。……ウエオ

(2)　A地区で収穫されたジャガイモ400個からなる標本において，重さが200 gを超えていたジャガイモの標本における比率を $R=\dfrac{Z}{400}$ とする。R の標準偏差 $\sigma(R)$ は，Z が二項分布 $B(400,\ 0.25)$ に従うことから，

$$\sigma(R)=\sqrt{\frac{0.25(1-0.25)}{400}}=\frac{1}{20}\sqrt{\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{80}\quad(\cdots\cdots\underline{\underline{2}})$$ ……カ

である。

標本の大きさ400は十分に大きいので，R は近似的に正規分布

$$N(0.25,\ \sigma(R)^2)=N\left(0.25,\ \frac{3}{6400}\right)$$

に従う。これを，

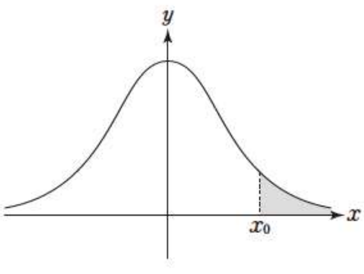
$$R_0=\frac{R-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{80}}=\frac{80R-20}{\sqrt{3}}$$

により標準化することで，R_0 は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

これより，

$$P(R\geqq x)=P\left(R_0\geqq\frac{80x-20}{\sqrt{3}}\right)=0.0465$$

となる x の値は右図の網目部分の面積が0.0465となる x_0 に対して，



$$x_0=\frac{80x-20}{\sqrt{3}}$$

を満たす値であるから，

$$0.5-0.0465=0.4535$$

となるときの x_0 の値を正規分布表から求めると，$x_0=1.68$ である。$\sqrt{3}=1.73$ より，

$$\frac{80x-20}{\sqrt{3}}=1.68$$

$$80x-20=1.68\times1.73$$

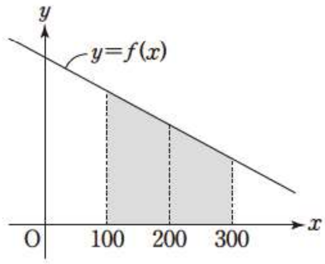
$$x=\frac{1.68\times1.73+20}{80}$$

$$x=\frac{2.8633}{10}$$

これより，求める x の値は，0.286　(……②)　……キ

(3)　B地区で収穫され，出荷される予定のジャガイモのうち，$100\leqq x\leqq 300$ での X の確率密度関数を $f(x)$ としているので，

$$P(100\leqq X\leqq 300)=1 \quad\text{……ク}$$



よって，右図の網目部の面積が1より，

$$\frac{f(100)+f(300)}{2}\times(300-100)=1$$

つまり，

$$\frac{100a+b+300a+b}{2}\times 200=(200a+b)\times 200$$

$$=4\cdot 10^4a+2\cdot 10^2b=1 \quad\text{……①}$$　……ケ，コ

次に，X の平均(期待値)が重さの標本平均 180 g と等しくなるように確率密度関数を定める。

X の平均(期待値) m の定義により，

$$m=\int_{100}^{300}xf(x)dx$$

であるから，$f(x)=ax+b$ $(100\leqq x\leqq 300)$ に対して，

$$m=\int_{100}^{300}(ax^2+bx)dx$$

$$=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2\right]_{100}^{300}$$

$$=\frac{a}{3}\times(300^3-100^3)+\frac{b}{2}(300^2-100^2)$$

よって，

$$m=\frac{26}{3}\cdot 10^6a+4\cdot 10^4b=180 \quad\text{……②}$$

となる。①，②より，確率密度関数 $f(x)$ は，

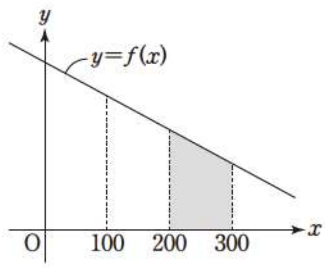
$$\begin{cases}4\cdot 10^4a+2\cdot 10^2b=1\\ 26\cdot 10^6a+12\cdot 10^4b=540\end{cases}\ \text{から}\ \begin{cases}a=-3\cdot 10^{-5}\\ b=11\cdot 10^{-3}\end{cases}$$

したがって，

$$f(x)=-3\cdot 10^{-5}x+11\cdot 10^{-3} \quad\text{……③}$$　……サ，シス

と得られる。

よって，B地区で収穫され，出荷される予定のすべてのジャガイモのうち，重さが 200 g 以上のものが全体に占める割合は，右図の網目部の面積だから，



$$\frac{f(200)+f(300)}{2}\times(300-200)$$

$$=\frac{-3\times10^{-5}(200+300)+2\times11\times10^{-3}}{2}\times100$$

$$=-\frac{15}{2}\times10^{-1}+11\times10^{-1}$$

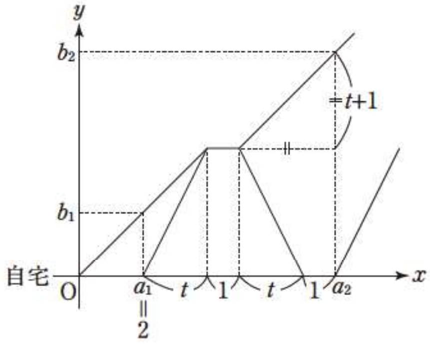
$$=\frac{-15+22}{20}=\frac{7}{20}=\frac{35}{100}$$

よって，全体の 35 %　(……②)　　……セ

と見積もることができる。

第 4 問

(1)　自転車は移動中の速さが毎分 2 なので，出発してから最初に歩行者に追いつくまでの時間を t とすると自宅から $2t$ の位置で追いつくことになる。



歩行者は毎分 1 の速さで歩いているので

$$2+t=2t \quad \text{つまり} \quad t=2$$

これより，最初に歩行者に追いつく時刻と位置を表す点の座標は，(4, 4) となる。　……ア

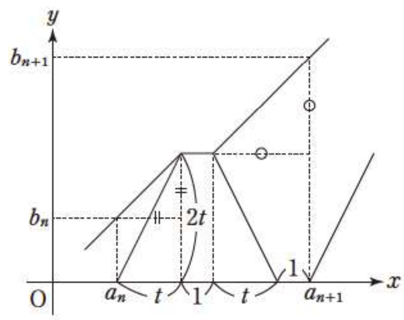
以上から，自転車と歩行者の位置関係を表す右のグラフを利用すると，

$$a_2=a_1+t+1+t+1$$
$$=2+2+1+2+1=8$$ ……イ

$$b_2=4+(t+1)$$
$$=4+2+1=7$$ ……ウ

とわかる。

一般に，自転車が n 回目に自宅を出発してから，次に歩行者に追いつくまでの時間を t とすると，同様に考えて，自宅から $2t$ の位置で追いつくことになるので，右のグラフから，



$$b_n+t=2t \quad \text{つまり} \quad t=b_n$$

が成り立つ。

これより，追いつく時刻は $a_n+t=a_n+b_n$　(……③)　……エ

その位置は自宅から，$2t=2b_n$　(……④)　……オ

であり，座標で表せば，$(a_n+b_n,\ 2b_n)$ と表せる。

以上から，グラフを用いると

$$a_{n+1}=a_n+t+1+t+1$$
$$=a_n+b_n+1+b_n+1$$
$$=a_n+2b_n+2 \quad \cdots\cdots ①$$ ……カ，キ

$$b_{n+1}=b_n+t+(t+1)$$
$$=b_n+b_n+(b_n+1)$$
$$=3b_n+1 \quad \cdots\cdots ②$$ ……ク

が成り立つことがわかる。

まず，②について，

$$b_{n+1}+\frac{1}{2}=3\left(b_n+\frac{1}{2}\right)$$

と変形できるので，$b_n+\frac{1}{2}=c_n$ とおくと，$b_1=2$ から，数列 $\{c_n\}$ は

$$c_1=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2},\quad c_{n+1}=3c_n$$

を満たし，初項 $\frac{5}{2}$，公比 3 の等比数列であることがわかる。

よって，

$$c_n=\frac{5}{2}\cdot 3^{n-1}$$

$$b_n+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}\cdot 3^{n-1}$$

$$b_n=\frac{5}{2}\cdot 3^{n-1}-\frac{1}{2}\quad (\cdots\cdots 7)$$ ……ケ

を得る。この結果と，①より

$$a_{n+1}=a_n+2\left(\frac{5}{2}\cdot 3^{n-1}-\frac{1}{2}\right)+2$$

$$=a_n+5\cdot 3^{n-1}+1$$

よって，$n\geqq 2$ のとき，

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(5\cdot 3^{k-1}+1)$$

が成り立ち，$a_1=2$ から

$$a_n=2+5\times\frac{3^{n-1}-1}{3-1}+(n-1)$$ （ただし，これは $n=1$ でも成立する）

つまり，$n\geqq 1$ で，

$$a_n=\frac{5}{2}\cdot 3^{n-1}+n-\frac{3}{2}\quad (\cdots\cdots 9)$$ ……コ

であることがわかる。

(2) 歩行者が $y=300$ の位置に到着するときまでに，自転車が歩行者に追いつく回数 n は，$2b_n\leqq 300$ を満たす最大の n である。

よって，(1)から，歩行者は n 回目に $2b_n$ の位置で追いつかれることから

$$2\left(\frac{5}{2}\cdot 3^{n-1}-\frac{1}{2}\right)\leqq 300$$

$$5\cdot 3^{n-1}-1\leqq 300$$

$$3^{n-1}\leqq 60.2$$

を満たす最大の n であるから，$n=4$，つまり 4 回である。 ……サ

よって，4 回目に自転車が歩行者に追いつく時刻 x は

$$x=a_4+b_4=\frac{5}{2}\times 3^3+4-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\times 3^3-\frac{1}{2}=5\times 3^3+2=5\times 27+2=137$$ ……シスセ

である。

第５問

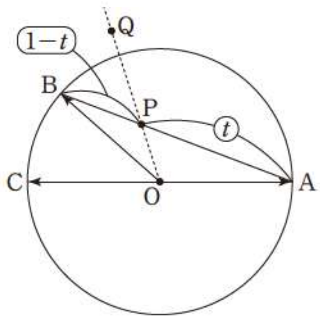
(1)　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\angle AOB$ であるから，

$$-\frac{2}{3}=1^2\cdot\cos\angle AOB$$

$$\cos\angle AOB=\frac{-2}{3}$$
……アイ，ウ

である。

ここで，P は線分 AB を $t:1-t$ に内分するので，



$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$$

と表せる。

よって，直線 OP 上の点 Q は，k を実数として，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ}&=k\overrightarrow{OP}\\&=k\{(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}\}\\&=(k-kt)\overrightarrow{OA}+kt\overrightarrow{OB}\quad\cdots\cdots①\quad(\cdots\cdots①,\ ⓪)\end{aligned}$$
……エ，オ

となり，また，$\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}$ より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CQ}&=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OC}\\&=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OA}\\&=(k-kt)\overrightarrow{OA}+kt\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\\&=(k-kt+1)\overrightarrow{OA}+kt\overrightarrow{OB}\quad(\cdots\cdots④,\ ⓪)\end{aligned}$$
……カ，キ

となる。

$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OP}$ が垂直，つまり $\overrightarrow{OA}\cdot\{(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}\}=0$ となるのは，

$$(1-t)|\overrightarrow{OA}|^2+t\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$$

$$1-t-\frac{2}{3}t=0$$

$$t=\frac{3}{5}$$
……ク，ケ

のときである。

以下，$t\neq\frac{3}{5}$，$\angle OCQ=90^\circ$ とする。

(2)　$\angle OCQ=90^\circ$　つまり　$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CQ}=0$ のとき，

$\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}$ だから，

$$-\overrightarrow{OA}\cdot\{(k-kt+1)\overrightarrow{OA}+kt\overrightarrow{OB}\}=0$$

$$-(k-kt+1)|\overrightarrow{OA}|^2-kt\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$$

$$-(k-kt+1)+\frac{2}{3}kt=0$$

$(5t-3)k=3$

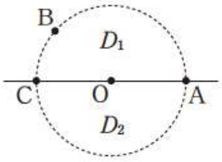
これより，

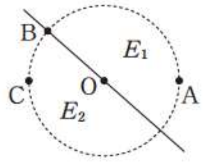
$$k=\dfrac{3}{\underline{\underline{5t-3}}} \quad \cdots\cdots②$$

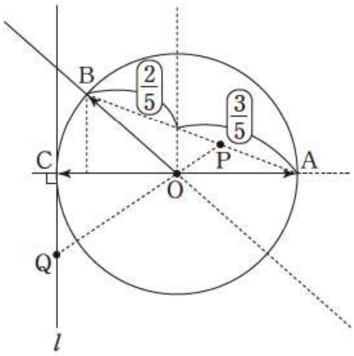
……コ，サ，シ

となることがわかる。

次に，問題の領域 D_1，D_2，E_1，E_2 は下図のようになっている。







ここで，Q は点 O を中心とした半径 1 の円の点 C での接線 l 上にもあることに注意すると，

(i)　$0<t<\dfrac{3}{5}$ のとき，$0°<\angle AOP<90°$ であるから，

OP と l は D_2 で交わり，この点が Q である。

さらにこのとき，$0°<\angle AOP<90°$ より，Q は E_2 の点であることもわかる。

このとき，点 Q は D_2 に含まれ，かつ E_2 に含まれる。(……$\underline{\underline{③}}$)　……ス

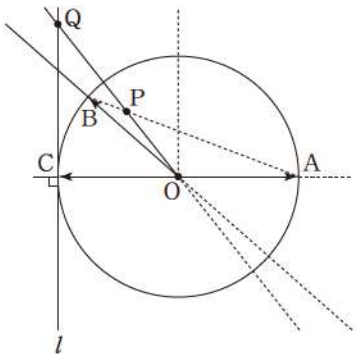
(ii)　$\dfrac{3}{5}<t<1$ のとき，$90°<\angle AOP<\angle AOB$ であるから，

OP と l は D_1 で交わり，この点が Q である。

さらにこのとき，$90°<\angle AOP<\angle AOB$ より，Q は E_1 の点であることもわかる。

このとき，点 Q は D_1 に含まれ，かつ E_1 に含まれる。

(……$\underline{\underline{⓪}}$)　……セ



(3)　$t=\dfrac{1}{2}$ のとき，②から，

$$k=\frac{3}{5\times\frac{1}{2}-3}=\frac{3}{-\frac{1}{2}}=-6$$

であり，①から，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ}&=-6\overrightarrow{OP}\\&=-6\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)\\&=-3(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\end{aligned}$$

よって，

$$|\overrightarrow{OQ}|^2=9(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$$

$=9(|\overrightarrow{OA}|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2)$

$=9\left(2-2\cdot\dfrac{2}{3}\right)$

$=6$

これより $|\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{6}$ とわかる。 ……ソ

次に，直線 OA に関して，$t=\dfrac{1}{2}$ のときの点 Q と対称な点を R とすると，

$\overrightarrow{CR}=-\overrightarrow{CQ}$ ……タ

$=-(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OC})$

$=-\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OC}$

$=-(-3\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB})-\overrightarrow{OA}$

$=2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}$ ……チ，ツ

これが $\overrightarrow{CQ}$ として表されるときの k と t，つまり，

$2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=(k-kt+1)\overrightarrow{OA}+kt\overrightarrow{OB}$

となるときの k と t は，$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ が一次独立（$\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{OB}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{OA}\not\parallel\overrightarrow{OB}$）であることに注意すると，

$\begin{cases}2=k-kt+1\\3=kt\end{cases}$ つまり　$2=k-3+1$

より，$k=4$，$t=\dfrac{3}{4}$ である。 ……テ，ト

（注）　**チ，ツ**の後，会話文にあるように $\overrightarrow{OR}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ で表す必要はないが以下で，$\overrightarrow{OR}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ で表す流れを示そう。

$\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OR}=2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}$

R の位置に Q がくるとき，

$\overrightarrow{OQ}=(k-kt)\overrightarrow{OA}+kt\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}$

となる k，t は，$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ が一次独立であることに注意すると，

$\begin{cases}k-kt=1\\kt=3\end{cases}$ つまり　$k-3=1$

より，$k=4$，$t=\dfrac{3}{4}$ である。 ……テ，ト