

試験開始の指示があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。

(T)

数 学

② [数学Ⅱ 数学Ⅱ・数学B]

(100点)
60分

簿記・会計及び情報関係基礎の問題冊子は、出願時にそれぞれの科目の受験を希望した者に配付します。

I 注意事項

- 解答用紙に、正しく記入・マークされていない場合は、採点できないことがあります。特に、解答用紙の解答科目欄にマークされていない場合又は複数の科目にマークされている場合は、0点となることがあります。
- 出題科目、ページ及び選択方法は、下表のとおりです。

出題科目	ページ	選択方法
数学Ⅱ	4~24	左の2科目のうちから1科目を選択し、 解答しなさい。
数学Ⅱ・数学B	25~53	

- 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を高く挙げて監督者に知らせなさい。
- 選択問題については、いずれか2問を選択し、その問題番号の解答欄に解答しなさい。
- 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 不正行為について
 - 不正行為に対しては厳正に対処します。
 - 不正行為に見えるような行為が見受けられた場合は、監督者がカードを用いて注意します。
 - 不正行為を行った場合は、その時点で受験を取りやめさせ退室させます。
- 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

II 解答上の注意

解答上の注意は、裏表紙に記載してあります。この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。

II 解答上の注意

- 1 解答は、解答用紙の問題番号に対応した解答欄にマークしなさい。
- 2 問題の文中の **ア** , **イウ** などには、符号(−), 数字(0 ~ 9), 又は文字(a ~ d)が入ります。ア, イ, ウ, …の一つ一つは、これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア, イ, ウ, …で示された解答欄にマークして答えなさい。

例 **アイウ** に $-8a$ と答えたいとき

ア	Ⓐ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 Ⓛ Ⓜ Ⓝ Ⓞ
イ	⊖ 0 1 2 3 4 5 6 7 Ⓠ 9 Ⓛ Ⓜ Ⓝ Ⓞ
ウ	⊖ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 Ⓠ Ⓛ Ⓜ Ⓝ Ⓞ

- 3 数と文字の積の形で解答する場合、数を文字の前にして答えなさい。
例えば、 $3a$ と答えるところを、 $a3$ と答えてはいけません。
- 4 分数形で解答する場合、分数の符号は分子につけ、分母につけてはいけません。

例えれば、 $\frac{\text{エオ}}{\text{カ}}$ に $-\frac{4}{5}$ と答えたいときは、 $-\frac{4}{5}$ として答えなさい。

また、それ以上約分できない形で答えなさい。
例えれば、 $\frac{3}{4}$, $\frac{2a+1}{3}$ と答えるところを、 $\frac{6}{8}$, $\frac{4a+2}{6}$ のように答えてはいけません。

- 5 小数の形で解答する場合、指定された桁数の一つ下の桁を四捨五入して答えなさい。また、必要に応じて、指定された桁まで⓪にマークしなさい。

例えれば、**キ** . **クケ** に 2.5 と答えたいときは、2.50 として答えなさい。

- 6 根号を含む形で解答する場合、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えれば、 $4\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$, $6\sqrt{2a}$ と答えるところを、 $2\sqrt{8}$, $\frac{\sqrt{52}}{4}$, $3\sqrt{8a}$ のように答えてはいけません。

- 7 問題の文中の二重四角で表記された **コ** などには、選択肢から一つを選んで、答えなさい。

- 8 同一の問題文中に **サシ** , **ス** などが 2 度以上現れる場合、原則として、2 度目以降は、**サシ** , **ス** のように細字で表記します。

数 学 II

(全 問 必 答)

第1問 (配点 30)

[1] 三角関数の値の大小関係について考えよう。

(1) $x = \frac{\pi}{6}$ のとき $\sin x$ $\sin 2x$ であり, $x = \frac{2}{3}\pi$ のとき

$\sin x$ $\sin 2x$ である。

, の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

① <

② =

③ >

(数学II第1問は次ページに続く。)

(2) $\sin x$ と $\sin 2x$ の値の大小関係を詳しく調べよう。

$$\sin 2x - \sin x = \sin x (\boxed{\text{ウ}} \cos x - \boxed{\text{エ}})$$

であるから、 $\sin 2x - \sin x > 0$ が成り立つことは

$$[\sin x > 0 \quad \text{かつ} \quad \boxed{\text{ウ}} \cos x - \boxed{\text{エ}} > 0] \dots \dots \dots \quad ①$$

または

$$[\sin x < 0 \quad \text{かつ} \quad \boxed{\text{ウ}} \cos x - \boxed{\text{エ}} < 0] \dots \dots \dots \quad ②$$

が成り立つことと同値である。 $0 \leq x \leq 2\pi$ のとき、①が成り立つような x の値の範囲は

$$0 < x < \frac{\pi}{\boxed{\text{オ}}}$$

であり、②が成り立つような x の値の範囲は

$$\pi < x < \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}} \pi$$

である。よって、 $0 \leq x \leq 2\pi$ のとき、 $\sin 2x > \sin x$ が成り立つような x の値の範囲は

$$0 < x < \frac{\pi}{\boxed{\text{オ}}}, \quad \pi < x < \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}} \pi$$

である。

(数学 II 第 1 問は次ページに続く。)

数学Ⅱ

(3) $\sin 3x$ と $\sin 4x$ の値の大小関係を調べよう。

三角関数の加法定理を用いると、等式

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta \quad \dots \quad ③$$

が得られる。 $\alpha + \beta = 4x$, $\alpha - \beta = 3x$ を満たす α , β に対して ③ を用いることにより、 $\sin 4x - \sin 3x > 0$ が成り立つことは

$$[\cos \boxed{\text{ク}} > 0 \text{ かつ } \sin \boxed{\text{ケ}} > 0] \quad \dots \quad ④$$

または

$$[\cos \boxed{\text{ク}} < 0 \text{ かつ } \sin \boxed{\text{ケ}} < 0] \quad \dots \quad ⑤$$

が成り立つことと同値であることがわかる。

$0 \leq x \leq \pi$ のとき、④、⑤により、 $\sin 4x > \sin 3x$ が成り立つような x の値の範囲は

$$0 < x < \frac{\pi}{\boxed{\text{コ}}}, \quad \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \pi < x < \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \pi$$

である。

$\boxed{\text{ク}}$, $\boxed{\text{ケ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

- | | | | |
|------------------|------------------|------------------|------------------|
| Ⓐ 0 | Ⓑ x | Ⓒ $2x$ | Ⓓ $3x$ |
| Ⓔ $4x$ | Ⓕ $5x$ | Ⓖ $6x$ | Ⓗ $\frac{x}{2}$ |
| Ⓛ $\frac{3}{2}x$ | Ⓜ $\frac{5}{2}x$ | Ⓝ $\frac{7}{2}x$ | Ⓣ $\frac{9}{2}x$ |

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

数学 II

(4) (2), (3) の考察から, $0 \leq x \leq \pi$ のとき, $\sin 3x > \sin 4x > \sin 2x$ が成り立つような x の値の範囲は

$$\frac{\pi}{\boxed{\text{コ}}} < x < \frac{\pi}{\boxed{\text{ソ}}}, \quad \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \pi < x < \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}} \pi$$

であることがわかる。

(数学 II 第 1 問は次ページに続く。)

数学Ⅱ

[2]

(1) $a > 0, a \neq 1, b > 0$ のとき, $\log_a b = x$ とおくと, ツが成り立つ。

ツの解答群

① $x^a = b$

② $a^x = b$

④ $a^b = x$

① $x^b = a$

③ $b^x = a$

⑤ $b^a = x$

(2) 様々な対数の値が有理数か無理数かについて考えよう。

(1) $\log_5 25 = \frac{\text{テ}}{\text{ト}}, \log_9 27 = \frac{\text{ト}}{\text{ナ}}$ であり, どちらも有理数である。

(ii) $\log_2 3$ が有理数と無理数のどちらであるかを考えよう。

$\log_2 3$ が有理数であると仮定すると, $\log_2 3 > 0$ であるので, 二つの自

然数 p, q を用いて $\log_2 3 = \frac{p}{q}$ と表すことができる。このとき, (1) によ

り $\log_2 3 = \frac{p}{q}$ は $\frac{\text{二}}{\text{二}}$ と変形できる。いま, 2は偶数であり3は奇数

であるので, $\frac{\text{二}}{\text{二}}$ を満たす自然数 p, q は存在しない。

したがって, $\log_2 3$ は無理数であることがわかる。

(iii) a, b を 2 以上の自然数とするとき, (ii) と同様に考えると, 「ヌならば $\log_a b$ はつねに無理数である」ことがわかる。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

二 の解答群

① $p^2 = 3q^2$

② $q^2 = p^3$

③ $p^3 = 2q^3$

④ $p^2 = q^3$

⑤ $2^p = 3^q$

ヌ の解答群**①** a が偶数**②** b が偶数**③** a が奇数**④** b が奇数**⑤** a と b がともに偶数, または a と b がともに奇数**⑥** a と b のいずれか一方が偶数で, もう一方が奇数

数学Ⅱ

第2問 (配点 30)

[1]

(1) k を正の定数とし、次の3次関数を考える。

$$f(x) = x^2(k - x)$$

$y = f(x)$ のグラフと x 軸との共有点の座標は $(0, 0)$ と $(\boxed{\text{ア}}, 0)$ で

ある。

$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = \boxed{\text{イウ}} x^2 + \boxed{\text{エ}} kx$$

である。

$x = \boxed{\text{オ}}$ のとき、 $f(x)$ は極小値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる。

$x = \boxed{\text{キ}}$ のとき、 $f(x)$ は極大値 $\boxed{\text{ク}}$ をとる。

また、 $0 < x < k$ の範囲において $x = \boxed{\text{キ}}$ のとき $f(x)$ は最大となることがわかる。

$\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{オ}}$ ~ $\boxed{\text{ク}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

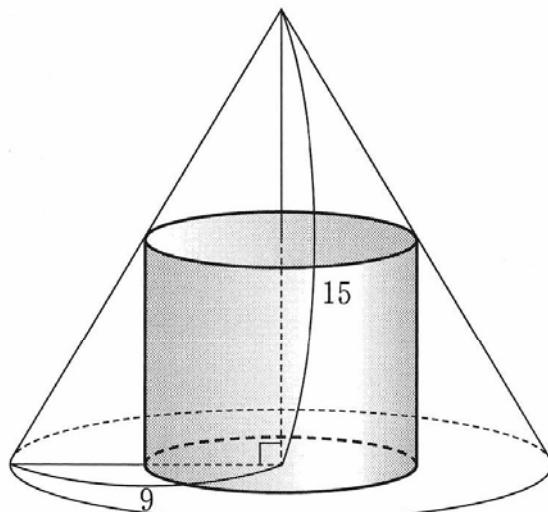
- | | | | |
|---------------------|---------------------|--------------------|--------------------|
| ① 0 | ② $\frac{1}{3}k$ | ③ $\frac{1}{2}k$ | ④ $\frac{2}{3}k$ |
| ⑤ k | ⑥ $\frac{3}{2}k$ | ⑦ $-4k^2$ | ⑧ $\frac{1}{8}k^2$ |
| ⑨ $\frac{2}{27}k^3$ | ⑩ $\frac{4}{27}k^3$ | ⑪ $\frac{4}{9}k^3$ | ⑫ $4k^3$ |

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

- (2) 後の図のように底面が半径 9 の円で高さが 15 の円錐に内接する円柱を考
える。円柱の底面の半径と体積をそれぞれ x , V とする。 V を x の式で表す
と

$$V = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} \pi x^2 (\boxed{\text{サ}} - x) \quad (0 < x < 9)$$

である。(1)の考察より、 $x = \boxed{\text{シ}}$ のとき V は最大となることがわか
る。 V の最大値は $\boxed{\text{スセソ}} \pi$ である。



(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

数学Ⅱ

[2]

(1) 定積分 $\int_0^{30} \left(\frac{1}{5}x + 3 \right) dx$ の値は タチツ である。

また、関数 $\frac{1}{100}x^2 - \frac{1}{6}x + 5$ の不定積分は

$$\int \left(\frac{1}{100}x^2 - \frac{1}{6}x + 5 \right) dx = \frac{1}{\boxed{\text{テトナ}}} x^3 - \frac{1}{\boxed{\text{ニヌ}}} x^2 + \boxed{\text{ネ}} x + C$$

である。ただし、 C は積分定数とする。

(2) ある地域では、毎年3月頃「ソメイヨシノ（桜の種類）の開花予想日」が話題になる。太郎さんと花子さんは、開花日時を予想する方法の一つに、2月に入ってからの気温を時間の関数とみて、その関数を積分した値をもとにすることがあることを知った。ソメイヨシノの開花日時を予想するために、二人は図1の6時間ごとの気温の折れ線グラフを見ながら、次のように考えることにした。

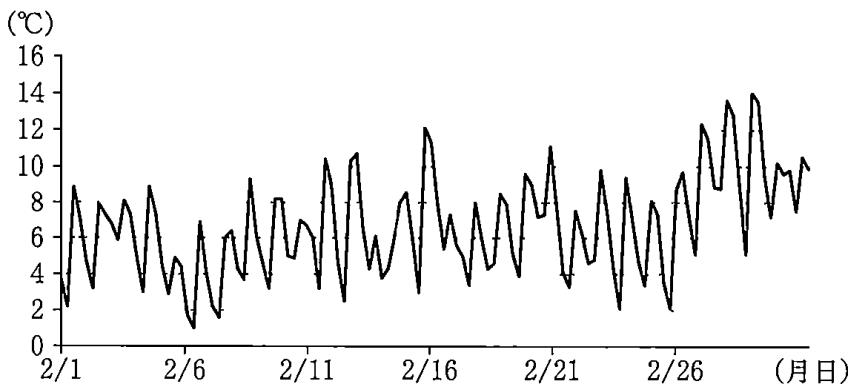


図1 6時間ごとの気温の折れ線グラフ

x の値の範囲を 0 以上の実数全体として、2月1日前午前0時から $24x$ 時間経った時点を x 日後とする。(例えば、10.3日後は2月11日前午前7時12分を表す。) また、 x 日後の気温を y °C とする。このとき、 y は x の関数であり、これを $y = f(x)$ とおく。ただし、 y は負にはならないものとする。

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

気温を表す関数 $f(x)$ を用いて二人はソメイヨシノの開花日時を次の設定で考えることにした。

設定

正の実数 t に対して、 $f(x)$ を 0 から t まで積分した値を $S(t)$ とする。すなわち、 $S(t) = \int_0^t f(x) dx$ とする。この $S(t)$ が 400 に到達したとき、ソメイヨシノが開花する。

設定のもと、太郎さんは気温を表す関数 $y = f(x)$ のグラフを図2のように直線とみなしてソメイヨシノの開花日時を考えることにした。

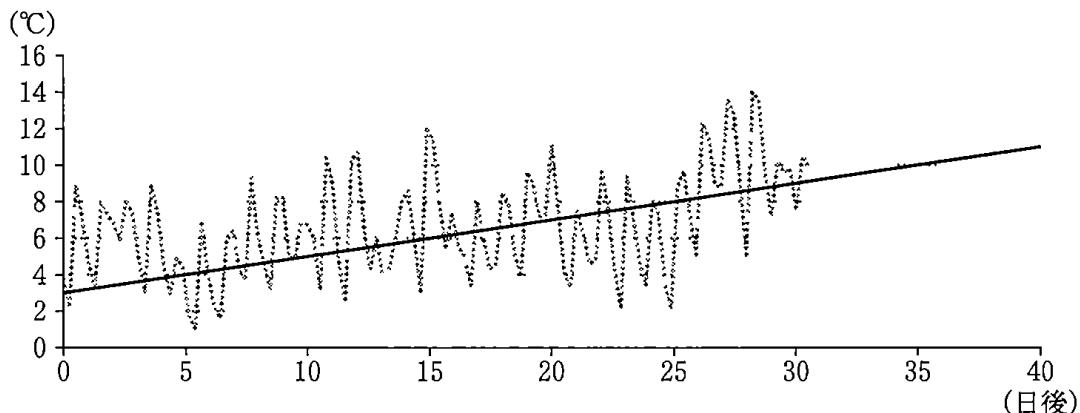


図2 図1のグラフと、太郎さんが直線とみなした $y = f(x)$ のグラフ

(i) 太郎さんは

$$f(x) = \frac{1}{5}x + 3 \quad (x \geq 0)$$

として考えた。このとき、ソメイヨシノの開花日時は2月に入ってから
□となる。

□の解答群

① 30日後

② 40日後

③ 50日後

④ 60日後

⑤ 70日後

⑥ 80日後

⑦ 90日後

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

数学Ⅱ

- (ii) 太郎さんと花子さんは、2月に入ってから30日後以降の気温について話をしている。

太郎：1次関数を用いてソメイヨシノの開花日時を求めてみたよ。

花子：気温の上がり方から考えて、2月に入ってから30日後以降の気温を表す関数が2次関数の場合も考えてみようか。

花子さんは気温を表す関数 $f(x)$ を、 $0 \leq x \leq 30$ のときは太郎さんと同じように

$$f(x) = \frac{1}{5}x + 3 \quad \dots \dots \dots \quad ①$$

とし、 $x \geq 30$ のときは

$$f(x) = \frac{1}{100}x^2 - \frac{1}{6}x + 5 \quad \dots \dots \dots \quad ②$$

として考えた。なお、 $x = 30$ のとき ① の右辺の値と ② の右辺の値は一致する。花子さんの考えた式を用いて、ソメイヨシノの開花日時を考えよう。(1)より

$$\int_0^{30} \left(\frac{1}{5}x + 3 \right) dx = \boxed{\text{タチツ}}$$

であり

$$\int_{30}^{40} \left(\frac{1}{100}x^2 - \frac{1}{6}x + 5 \right) dx = 115$$

となることがわかる。

また、 $x \geq 30$ の範囲において $f(x)$ は増加する。よって

$$\int_{30}^{40} f(x) dx \quad \boxed{\text{ハ}} \quad \int_{40}^{50} f(x) dx$$

であることがわかる。以上より、ソメイヨシノの開花日時は2月に入ってから ヒ となる。

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

数学 II

八 の解答群

① <

② =

③ >

ヒ の解答群

① 30 日後より前

② 30 日後

③ 30 日後より後, かつ 40 日後より前

④ 40 日後

⑤ 40 日後より後, かつ 50 日後より前

⑥ 50 日後

⑦ 50 日後より後, かつ 60 日後より前

⑧ 60 日後

⑨ 60 日後より後

数学Ⅱ

第3問 (配点 20)

(1) 次の問題1について考えよう。

問題1

座標平面上の原点をOとし、方程式 $(x - 10)^2 + (y - 5)^2 = 25$ が表す円を C_1 とする。点Pが円 C_1 上を動くとき、線分OPを2:3に内分する点Qの軌跡を求めよ。

(1) 円 C_1 は、中心(アイ , ウ), 半径 エ の円である。

(数学Ⅱ第3問は次ページに続く。)

数学Ⅱ

(2) 次の問題2について考えよう。

問題2

座標平面上の原点をOとし、方程式 $(x - 10)^2 + (y - 5)^2 = 25$ が表す円を C_1 とする。点Pが円 C_1 上を動くとき、線分OPを $m:n$ に内分する点Rの軌跡を求めよ。ただし、mとnは正の実数である。

円 C_1 の中心をAとする。点Rの軌跡は円となり、その中心は線分OAを
スに内分する点であり、半径は円 C_1 の半径のセ倍である。

ス

の解答群

① $1:m$

② $1:n$

③ $m:n$

④ $m:1$

⑤ $n:1$

セ

セ

の解答群

① $\frac{m}{n}$

② $\frac{n}{m}$

③ $\frac{m+n}{m}$

④ $\frac{m+n}{n}$

⑤ $\frac{m}{m+n}$

セ

(数学Ⅱ第3問は次ページに続く。)

(3) 太郎さんと花子さんは、次の問題 3について話している。

問題 3

座標平面上の 2 点 D(1, 6), E(3, 2)をとり、方程式

$(x - 5)^2 + (y - 7)^2 = 9$ が表す円を C_3 とする。点 P が円 C_3 上を動くとき、 $\triangle DEP$ の重心 G の軌跡を求めよ。

太郎：点 P, G の座標をそれぞれ (s, t) , (x, y) とおいて、(1) の (ii) のようにして計算すれば求められそうだね。

花子：(1) の (iii) や (2) で考えたことをもとにしても求められるかな。

線分 DE の中点を M とする。 $\triangle DEP$ の重心 G は、線分 MP を ソ に内分する点である。

点 G の軌跡は、中心 $(\boxed{\text{タ}}, \boxed{\text{チ}})$, 半径 ツ の円である。

ソ の解答群

Ⓐ 1 : 2

Ⓑ 1 : 3

Ⓒ 2 : 3

Ⓓ 2 : 1

Ⓔ 3 : 1

Ⓕ 3 : 2

数学Ⅱ

第4問 (配点 20)

p, q を実数とし、 x の整式 $S(x), T(x)$ を次のように定める。

$$S(x) = (x - 2) \{x^2 - 2(p + 1)x + 2p^2 - 2p + 5\}$$

$$T(x) = x^3 + x + q$$

x の3次方程式 $S(x) = 0$ の三つの解を $2, \alpha, \beta$ とする。 x の3次方程式 $T(x) = 0$ の三つの解を r, α', β' とする。ただし、 r は実数であるとする。

(1) $S(x) = 0$ の解がすべて実数になるのは、 x の2次方程式

$$x^2 - 2(p + 1)x + 2p^2 - 2p + 5 = 0 \quad \dots \quad ①$$

が実数解をもつときである。①の判別式を考えることにより、①が実数解をもつための必要十分条件は

$$p^2 - \boxed{\text{ア}} p + \boxed{\text{イ}} \leq 0$$

であることがわかる。すなわち、 $p = \boxed{\text{ウ}}$ である。よって、 $S(x) = 0$ の解がすべて実数になるとき、その解は $x = 2, \boxed{\text{エ}}$ である。

$p \neq \boxed{\text{ウ}}$ のとき、 $S(x) = 0$ は二つの虚数

$$x = p + \boxed{\text{オ}} \pm (p - \boxed{\text{カ}})i$$

を解にもつ。このことから、 $p \neq \boxed{\text{ウ}}$ のとき、 $S(x) = 0$ の二つの虚数解 α, β は互いに共役な複素数であることがわかる。

(数学Ⅱ第4問は次ページに続く。)

数学 II

(2) $x = r$ が $T(x) = 0$ の解であるので, $q = -r \boxed{\text{キ}} - r$ となる。これより $T(x)$ は次のように表せる。

$$T(x) = (x - r) \left(x^2 + rx + r \boxed{\text{ク}} + \boxed{\text{ケ}} \right)$$

ここで x の 2 次方程式 $x^2 + rx + r \boxed{\text{ク}} + \boxed{\text{ケ}} = 0$ の判別式を D とおくと, すべての実数 r に対して $D \boxed{\text{コ}} 0$ となり, $T(x) = 0$ の $x = r$ 以外の解は $x = \boxed{\text{サ}}$ となる。したがって, α' , β' は $\boxed{\text{シ}}$ 。

コ の解答群

① <	② =	③ >
-----	-----	-----

サ の解答群

① $-\frac{r}{2}$	② $-r$	③ $\frac{-r \pm D}{2}$
④ $\frac{-2r \pm D}{2}$	⑤ $\frac{-r \pm \sqrt{D}i}{2}$	⑥ $\frac{-2r \pm \sqrt{D}i}{2}$
⑦ $\frac{-r \pm \sqrt{-D}i}{2}$		

シ の解答群

- | | | |
|------------|------------|-----------------------|
| ① 異なる実数である | ② 等しい実数である | ③ 虚数であり, 互いに共役な複素数である |
|------------|------------|-----------------------|

(数学 II 第 4 問は次ページに続く。)

数学Ⅱ

(3) $S(x) = 0$, $T(x) = 0$ が共通の解をもつ場合を考える。

(1) 共通の解が $x = 2$ であるような r の値は ス。

ス の解答群

- | | |
|--|--|
| ① 存在しない | ① ちょうど 1 個存在する |
| ② ちょうど 2 個存在する | ③ ちょうど 3 個存在する |

(ii) 共通の実数解をもつが, $x = 2$ が共通の解ではないとき, p , r の値の組 (p, r) は

セ, ソ)

である。

(iii) 共通の解が虚数のとき, p , r の値の組 (p, r) は

タ, チツ), (テト, ナ)

である。

数学 II

(下書き用紙)

数学 II

(下書き用紙)