2023 年度大学入学共通テスト 解説〈数学Ⅰ・A〉

第 1 問

〔1〕 $|x+6| \leqq 2$ ……㋐ より，$-2 \leqq x+6 \leqq 2$

この辺々から 6 を引くと，

$\underline{\underline{-8}} \leqq x \leqq \underline{\underline{-4}}$ ……㋑ ……アイ，ウエ

㋐において $x=(1-\sqrt{3})(a-b)(c-d)$ とすると，$|(1-\sqrt{3})(a-b)(c-d)+6| \leqq 2$ ……㋒ が得られるから，㋑より，$-8 \leqq (1-\sqrt{3})(a-b)(c-d) \leqq -4$

ここで，$1-\sqrt{3}<0$ であるから，

$$\frac{-8}{1-\sqrt{3}} \geqq (a-b)(c-d) \geqq \frac{-4}{1-\sqrt{3}} \quad \text{すなわち} \quad \frac{4}{\sqrt{3}-1} \leqq (a-b)(c-d) \leqq \frac{8}{\sqrt{3}-1}$$

よって，

$$\frac{4}{\sqrt{3}-1}=\frac{4(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{4(\sqrt{3}+1)}{3-1}=2(\sqrt{3}+1)$$

$$\frac{8}{\sqrt{3}-1}=2\times 2(\sqrt{3}+1)=4(\sqrt{3}+1)$$

より，

$\underline{\underline{2}}+\underline{\underline{2}}\sqrt{3} \leqq (a-b)(c-d) \leqq \underline{\underline{4}}+\underline{\underline{4}}\sqrt{3}$ ……㋓ ……オ，カ，キ，ク

特に，

$(a-b)(c-d)=4+4\sqrt{3}$ ……① かつ $(a-c)(b-d)=-3+\sqrt{3}$ ……②

のとき，

①より，$ac-ad-bc+bd=4+4\sqrt{3}$ ……①′

②より，$ab-ad-bc+cd=-3+\sqrt{3}$ ……②′

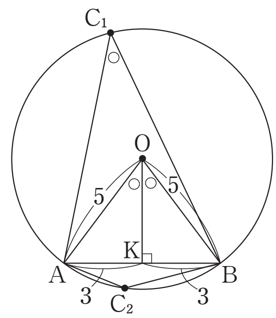
であるから，①′−②′ より，$ac+bd-ab-cd=7+3\sqrt{3}$

よって，

$(a-d)(c-b)=ac-ab-cd+bd=\underline{\underline{7}}+\underline{\underline{3}}\sqrt{3}$ ……ケ，コ

〔2〕

(1)　題意を図に示すと右のようになる。点 C としては，図の点 C_1，点 C_2 の 2 通りが考えられる。



点 O から線分 AB に下ろした垂線と線分 AB との交点を K とすると，点 K は AB の中点であるから，

$OK=\sqrt{5^2-3^2}=4$

また，$\angle AOK=\angle BOK$ である。

(i)　$\angle AC_1B=\dfrac{1}{2}\angle AOB=\angle AOK$ であるから，

$$\sin\angle AC_1B=\sin\angle AOK=\frac{AK}{OA}=\frac{3}{5}$$

また，$\angle AC_2B=180^\circ-\angle AC_1B$ より，

$$\sin\angle AC_2B=\sin(180^\circ-\angle AC_1B)=\sin\angle AC_1B=\frac{3}{5}$$

である。

よって，いずれの場合も，

$$\sin\angle ACB=\frac{3}{5}\quad(\cdots\cdots 0)$$ ……サ

【設問サの別解】

円 O は △ABC の外接円であるから，正弦定理より，

$$\frac{AB}{\sin\angle ACB}=2\times5$$

より，

$$\sin\angle ACB=\frac{6}{2\times5}=\frac{3}{5}\quad(\cdots\cdots 0)$$ ……サ

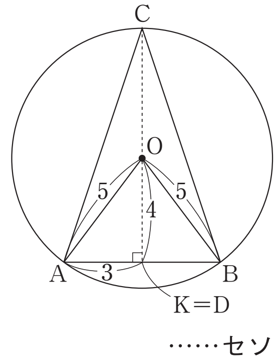
また，∠ACB が鈍角になるのは点 C が図の点 C_2 の場合であり，このとき

$\sin\angle AC_2B=\dfrac{3}{5}$，$\cos\angle AC_2B<0$ であるから，

$$\cos\angle ACB=\cos\angle AC_2B=-\sqrt{1-\sin^2\angle AC_2B}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}\quad(\cdots\cdots 7)$$

……シ

(ii)　△ABC の面積が最大となる点 C は，右図のように，直線 OK と円 O の交点のうち，直線 AB に関して点 O と同じ側にある点であり，題意の点 D は点 K と一致する。

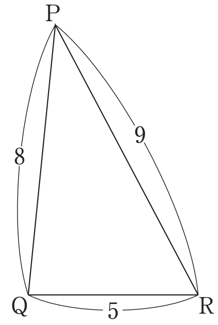


このとき，

$$\tan\angle OAD=\frac{OD}{AD}=\frac{4}{3}\quad(\cdots\cdots 4)$$ ……ス

また，△ABC の面積は，$\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot(CO+OD)=\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot(5+4)=27$ ……セソ

(2)　右図の $\triangle$PQR において余弦定理より，



$$\cos\angle \mathrm{QPR}=\frac{\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2-\mathrm{QR}^2}{2\cdot\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PR}}=\frac{8^2+9^2-5^2}{2\cdot 8\cdot 9}=\frac{5}{6}$$ ……タ，チ

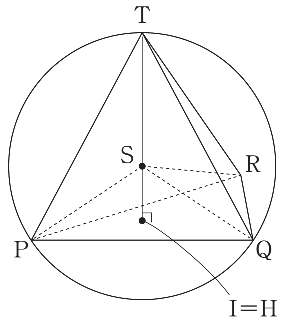
このとき，

$$\sin\angle \mathrm{QPR}=\sqrt{1-\cos^2\angle \mathrm{QPR}}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{11}}{6}$$

であるから，

$$\triangle \mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PR}\cdot\sin\angle \mathrm{QPR}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 9\cdot\frac{\sqrt{11}}{6}=6\sqrt{11}$$ ……ツ，テト

さて，球 S の中心 S から平面 α に下ろした垂線と平面 α の交点を I とすると，三角錐 TPQR の体積が最大となる点 T は，直線 IS と球 S の交点のうち，平面 α に関して点 S と同じ側にある点であり，題意の点 H は点 I と一致する。



このとき，$\triangle$SPH≡$\triangle$SQH≡$\triangle$SRH (直角三角形の斜辺と他の一辺がそれぞれ等しい)であるから，

PH＝QH＝RH　(……⑥) ……ナ

よって，点 H は $\triangle$PQR の外心であり，その外接円の半径を R とすると，正弦定理より，

$$2R=\frac{\mathrm{QR}}{\sin\angle \mathrm{QPR}}=\frac{5}{\frac{\sqrt{11}}{6}}=\frac{30}{\sqrt{11}}$$　すなわち，$R=\frac{15}{\sqrt{11}}$ (＝PH)

また，

$$\mathrm{SH}=\sqrt{\mathrm{SP}^2-R^2}=\sqrt{5^2-\left(\frac{15}{\sqrt{11}}\right)^2}=5\sqrt{1^2-\left(\frac{3}{\sqrt{11}}\right)^2}=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$$

以上より，三角錐 TPQR の体積は，

$$\frac{1}{3}\cdot\triangle \mathrm{PQR}\cdot(\mathrm{TS}+\mathrm{SH})=\frac{1}{3}\cdot 6\sqrt{11}\cdot\left(5+\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\right)=10\sqrt{11}+10\sqrt{2}=10(\sqrt{11}+\sqrt{2})$$

……ニヌ，ネノ，ハ

第２問

〔１〕

(1)　データを小さい順に並べたとき，

52 個のデータの中央値は，26 番目のデータと 27 番目のデータの平均値

52 個のデータの第１四分位数は，13 番目のデータと 14 番目のデータの平均値

52 個のデータの第３四分位数は，39 番目のデータと 40 番目のデータの平均値

である。

与えられたヒストグラムから，各階級に含まれるデータの個数は，小さい階級から順に，

2，7，11，7，10，8，5，0，1，1

であるから，

第１四分位数が含まれる階級は，㋐1800 以上 2200 未満。(……②)　……ア

第３四分位数が含まれる階級は，㋑3000 以上 3400 未満。(……⑤)　……イ

さらに，第１四分位数および第３四分位数の値の範囲は，それぞれ㋐，㋑であるから，四分位範囲は，

(3000−2200＝)800 より大きく，(3400−1800＝)1600 より小さい。(……①)　……ウ

(2)(i)　地域 E のデータの個数は 19 であるから，それらのデータを小さい順に並べたとき，

19 個のデータの中央値は，10 番目のデータの値

19 個のデータの第１四分位数は，5 番目のデータの値

である。地域 E の箱ひげ図から，第１四分位数は 2000 より大きいから，⓪は誤りである。

地域 E の範囲は，3800−1000＝2800 より小さく，地域 W の範囲は，4800−1400＝3400 より大きいから，両者は等しくない。よって①は誤りである。

地域 E の中央値は 2400 より小さく，地域 W の中央値は 2600 より大きいから，中央値は，地域 E より地域 W の方が大きい。よって②は正しい。

地域 E のデータの中央値(小さい方から 10 番目のデータの値)は 2600 より小さいから，2600 未満の市の割合は，10÷19＝0.52…以上である。一方，地域 W (33 市)のデータの中央値は，小さい方から 17 番目のデータの値であるから，これより小さい 2600 未満の市の割合は，高々 16÷33＝0.48…。よって，2600 未満の市の割合は，地域 E より地域 W の方が小さいから，③は誤りである。

以上により，正しいものは②。　……エ

(ii)　n 個のデータの分散 (s^2) とは，“各データ (x_n) の偏差(平均値 $(\overline{x})$ との差)の２乗”の平均，すなわち，$s^2=\dfrac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots\cdots+(x_n-\overline{x})^2\}$ であるから，答えは②。

……オ

(3)　データ x とデータ y の相関係数は，$\dfrac{(x,\ y\text{ の共分散})}{(x\text{ の標準偏差})\times(y\text{ の標準偏差})}$ で得られるから，

表 1 に示されている値を用いれば，求める相関係数は，

$$\frac{124000}{590\times570}=\frac{1240}{3363}=0.368\cdots\fallingdotseq 0.37\quad(\cdots\cdots 7)$$ ……カ

〔2〕

(1)　放物線 C_1 の方程式を $y=ax^2+bx+c$ とおくと，これが P(0, 3)，M(4, 3) を通ることから，

$3=c$ ……㋐，$3=16a+4b+c$ ……㋑

㋐を㋑に代入すると，

$16a+4b=0$　すなわち，$b=-4a$ ……㋒

よって，㋐，㋒より，放物線 C_1 の方程式は，

$y=ax^2-\underline{\underline{4}}ax+\underline{\underline{3}}$ ……㋓　……キ，ク

㋓はさらに，$y=a(x-2)^2-4a+3$ ……㋔ と変形できるから，プロ選手の「シュートの高さ」，すなわち，放物線 C_1 の頂点の y 座標は，

$-\underline{\underline{4}}a+\underline{\underline{3}}$ ……㋕　……ケ，コ

㋔より，㋕プロ選手の「ボールが最も高くなるときの地上の位置」は 2 である。

また，放物線 C_2 の方程式；$y=p\left\{x-\left(2-\dfrac{1}{8p}\right)\right\}^2-\dfrac{(16p-1)^2}{64p}+2$ より，㋖花子さんの「ボールが最も高くなるときの地上の位置」は $2-\dfrac{1}{8p}$ である。

ここに，放物線 C_2 が上に凸であることから $p<0$ であり，$-\dfrac{1}{8p}>0$

これより，$2-\dfrac{1}{8p}>2$ であるから，㋖の方が㋕よりもつねに M の x 座標 4 に近い。

(……$\underline{\underline{2}}$)　……サ

➡**注**　ボールがリングに入るとき，「ボールが最も高くなるときの地上の位置」が M の x 座標を超えることはないから，㋖<4 としてよい。

(2)　$\mathrm{AD}=\dfrac{\sqrt{3}}{15}$ のとき，$\mathrm{D}\left(3.8,\ 3+\dfrac{\sqrt{3}}{15}\right)$　すなわち　$\mathrm{D}\left(\dfrac{19}{5},\ 3+\dfrac{\sqrt{3}}{15}\right)$ であり，これが放物線 C_1 (㋔)上にあるとき，

$$3+\frac{\sqrt{3}}{15}=a\left(\frac{19}{5}-2\right)^2-4a+3$$

これより，

$$\frac{\sqrt{3}}{15}=\frac{81}{25}a-4a$$

$$\frac{19}{25}a=-\frac{\sqrt{3}}{15}$$

$$a=-\frac{5\sqrt{3}}{57}$$

このとき，放物線 C_1(㋓)の方程式は，

$$y=ax^2-4ax+3=a(x^2-4x)+3=-\underline{\underline{\frac{5\sqrt{3}}{57}}}(x^2-4x)+3$$ ……シ，ス，セソ

さらにこのとき，㋕より，プロ選手の「シュートの高さ」は，

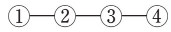
$$-4a+3=-4\cdot\left(-\frac{5\sqrt{3}}{57}\right)+3=\frac{20\sqrt{3}}{57}+3\fallingdotseq\frac{20\times1.73}{57}+3\fallingdotseq3.6$$

であるから，花子さんの「シュートの高さ」(約 3.4) と比べると，プロ選手 (……⓪) の方が大きく，その差は約 0.2，つまりボール約 1 個分　(……⓪)　……タ，チ

である。

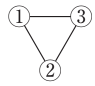
第３問

(1)　図Ｂにおいて，球１の塗り方は５通り，球１の塗り方のそれぞれに対し，球２の塗り方は４通り，球３の塗り方は４通り，球４の塗り方は４通りあるから，球の塗り方の総数は，


図Ｂ

$5\times4\times4\times4=320$（通り）　……アイウ

(2)　図Ｃにおいて，球１の塗り方は５通り，球１の塗り方のそれぞれに対し，球２の塗り方は４通り，球３の塗り方は（球１，２に塗った色以外の）３通りあるから，球の塗り方の総数は，


図Ｃ

$5\times4\times3=60$（通り）　……エオ

(3)　赤（●）をちょうど２回使う塗り方には，右の２つのタイプがある。

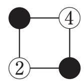


図１

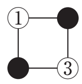


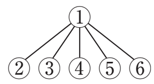
図２

図１においては，球２の塗り方は４通り，球４の塗り方は４通りあるから，$4\times4=16$（通り）。

図２においても同様に16通りあるから，球の塗り方の総数は，

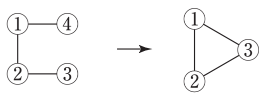
$16\times2=32$（通り）　……カキ

(4)　図Ｅにおいて，赤をちょうど３回使い，かつ青をちょうど２回使う塗り方は，球１には赤や青は塗れず，それ以外の色の３通り，球２～球６には，これら５個のうち３個に赤を塗れば，残り２個は塗る色は自動的に青に決まるから，球の塗り方の総数は，


図Ｅ

$3\times{}_5C_3=3\times10=30$（通り）　……クケ

(5)　図Ｆにおいて，球３と球４が同色になるとき，球３と球４を完全に重ねた図で条件を満たす塗り方ができるから，その図は


図Ｆ

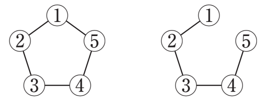
②　……コ

となる。

図Ｆの塗り方の総数は(1)と同じ320通りあるが，そのうち，球３と球４が同色になる塗り方は，(2)と同じ60通りある。残りは球３と球４が同色にならない塗り方で，それは図Ｄの塗り方に等しいから，答えは，

$320-60=260$（通り）　……サシス

(6)　図Gの塗り方のほか，図Hの塗り方も考える。図Hの塗り方の総数は，(1)と同様に考えて，



図G　　図H

$$5\times4\times4\times4\times4=1280\ (\text{通り})$$

図Hの塗り方のうち，球5と球1が同色になる塗り方は，球5と球1を完全に重ねた図(図D)と同じであるから，塗り方の総数は，(5)より260通りある。

よって，図Gの塗り方の総数は，

$$1280-260=\underline{\underline{1020}}\ (\text{通り})$$

……セソタチ

第 4 問

(1)　$462=2\times3\times7\times11$，$110=2\times5\times11$ より，462 と 110 の両方を割り切る素数のうち最大のものは

$\underline{\underline{11}}$　……アイ

である。

赤い長方形を並べてできる正方形のうち，辺の長さが最小であるものの一辺の長さは，462 と 110 の最小公倍数であるから，

$2\times3\times5\times7\times11=\underline{\underline{2310}}$　……ウエオカ

である。

また，赤い長方形を横に k 個，縦に l 個並べて正方形ではない長方形を作るとき，横の長さと縦の長さの差の絶対値は，

$|462k-110l|=|(2\times3\times7\times11)k-(2\times5\times11)l|=2\times11\times|21k-5l|$　……㋐

㋐を 0 でない最小の自然数とするために，$21k-5l=1$ または -1 となるような自然数 k，l があるかどうかを調べると，

$21k-5l=1$ のとき，$(k,\ l)=(1,\ 4)$，㋑$21k-5l=-1$ のとき，$(k,\ l)=(4,\ 17)$

が容易に見つかるから，このとき，

㋐$=2\times11\times|1|=\underline{\underline{22}}$　……キク

縦の長さが横の長さより 22 長い長方形は㋑の場合で，このとき，横の長さが最小であるものの横の長さは，

$462\times4=\underline{\underline{1848}}$　……ケコサシ

➡注　㋑において，$k=1$，2，3 としても，自然数 l が決まらないので，k の最小値が 4 であることがわかる。

(2)　$363=3\times11^2$，$154=2\times7\times11$

図 2 のような長方形の縦の長さが最小のものの縦の長さは，110 と 154 の最小公倍数であるから，

$2\times5\times7\times11=\underline{\underline{770}}$　……スセソ

462 と 363 の最大公約数は，

$3\times11=\underline{\underline{33}}$　……タチ

33 の倍数のうちで 770 の倍数でもある最小の正の整数，すなわち 33 と 770 の最小公倍数は，

$2\times3\times5\times7\times11=\underline{\underline{2310}}$　……ツテトナ

以上から，図 2 のような正方形の横の長さは 2310 の倍数であるから，赤い長方形を m 枚，青い長方形を n 枚横に並べたとすると，

$462m+363n=2310i$（m，n，i は自然数）

$(2\times3\times7\times11)m+(3\times11^2)n=(2\times3\times5\times7\times11)i$ より，$(2\times7)m+11n=(2\times5\times7)i$

これより，$11n=2\times7\times(5i-m)$ であるから，このとき，$5i-m$ は 11 の倍数である。

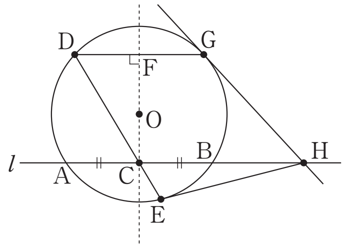
そこで $5i-m=11$ とすると，$i=3$，$m=4$ が容易に見つかり，$i=1$，2 としても，$5i-m$ が 11 の倍数となる自然数 m が決まらないので，i の最小値は 3 である。

よって，正方形の一辺の長さは，

$2310\times3=\underline{\underline{6930}}$　……ニヌネノ

第 5 問

(1)　手順 1 にしたがって作図すると，右図のようになる。



直線 EH が円 O の接線であることを証明するためには，

$\angle\mathrm{OEH}=90^\circ$　……アイ

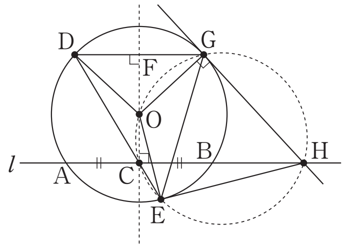
であることを示せばよい。

円の弦の中点と円の中心を結ぶと，その線分は弦と直交するから，

$\angle\mathrm{OCH}=90^\circ$

また，GH は円の接線であるから，

$\angle\mathrm{OGH}=90^\circ$



以上により，$\angle\mathrm{OCH}+\angle\mathrm{OGH}=180^\circ$ がいえるから，

4 点 C，G，H，O(……③)

は同一円周上にある。　……ウ

よって，円に内接する四角形の内角は，その対角の外角に等しいから，

$\angle\mathrm{CHG}=\angle\mathrm{FOG}$　(……④)　……エ

また，OF⊥DG より，点 F は DG の中点で，

$\angle\mathrm{FOG}=\angle\mathrm{FOD}$

これと，点 E が円 O の周上にあることから，円周角の定理より，

$\angle\mathrm{FOG}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{DOG}=\angle\mathrm{DEG}$　(……③)　……オ

これより，$\angle\mathrm{CHG}=\angle\mathrm{FOG}=\angle\mathrm{DEG}=\angle\mathrm{CEG}$ がいえるから，円周角の定理の逆より，

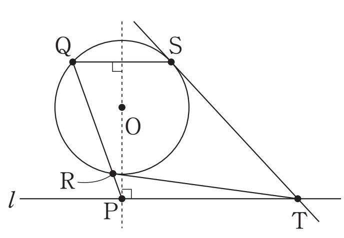
4 点 C，G，H，E(……②)

は同一円周上にある。　……カ

よって，5 点 C，O，G，H，E は同一円周上にあるから，

$\angle\mathrm{OEH}=\angle\mathrm{OCH}=90^\circ$

(2)　手順 2 にしたがって作図すると，右図のようになる。

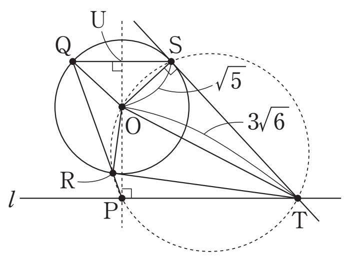


線分 QS と直線 OP の交点を U とおく。

(1)とほぼ同様に，$\angle\mathrm{OPT}=\angle\mathrm{OST}=90^\circ$ より，4 点 O，P，T，S は同一円周上にある。よって，$\angle\mathrm{PTS}=\angle\mathrm{UOS}$

さらに，$\angle\mathrm{UOS}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{QOS}=\angle\mathrm{QRS}$ であるから，

$\angle\mathrm{PTS}=\angle\mathrm{QRS}$　(……③)　……キ



これより，四角形の 1 つの内角は，その対角の外角に等しいから，4 点 R，P，T，S は同一円周上にあり，結果，5 点 O，R，P，T，S は同一円周上にある。

よって，$\angle OPT = 90°$ より，３点 O，P，R を通る円の直径は OT であり，
半径は，

$$\frac{OT}{2} = \underline{\underline{\frac{3\sqrt{6}}{2}}} \qquad \cdots\cdots ク，ケ，コ$$

また，$\angle ORT = \angle OPT = 90°$ であるから，

$$RT = \sqrt{OT^2 - OR^2} = \sqrt{(3\sqrt{6})^2 - (\sqrt{5})^2} = \underline{\underline{7}} \qquad \cdots\cdots サ$$