2023 年度大学入学共通テスト 解説〈数学Ⅱ・B〉

第 1 問

〔1〕

(1)　$x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，$\sin x=\dfrac{1}{2}$，$\sin 2x=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから，

$\sin x<\sin 2x$　(……⓪)　……ア

また，$x=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき，$\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin 2x=\sin\dfrac{4}{3}\pi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから，

$\sin x>\sin 2x$　(……②)　……イ

(2)　$\sin 2x=2\sin x\cos x$ を用いると，

$$\begin{aligned}\sin 2x-\sin x&=2\sin x\cos x-\sin x\\&=\sin x(2\cos x-1)\end{aligned}$$ ……ウ，エ

であるから，$\sin 2x-\sin x>0$ が成り立つということは，

「$\sin x>0$　かつ　$2\cos x-1>0$」……①

または

「$\sin x<0$　かつ　$2\cos x-1<0$」……②

が成り立つことと同値である．

$0\leqq x\leqq 2\pi$ のとき，

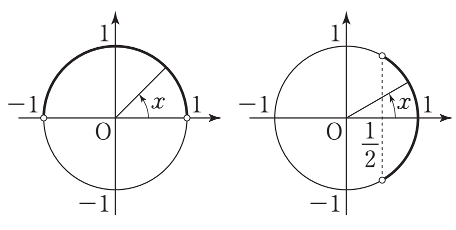
(i)　①が成り立つとき，

$\sin x>0$ より，

$0<x<\pi$　……(ア)

$2\cos x-1>0$　すなわち，$\cos x>\dfrac{1}{2}$ より，

$0\leqq x<\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi<x\leqq 2\pi$　……(イ)



(ア)かつ(イ)より，

$0<x<\dfrac{\pi}{3}$　……オ

(ii)　②が成り立つとき，(i)と同様にして，

$\sin x<0$　より，$\pi<x<2\pi$　……(ウ)

$2\cos x-1<0$　すなわち，$\cos x<\dfrac{1}{2}$ より，

$\dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{5}{3}\pi$　……(エ)

(ウ)かつ(エ)より，

$\pi < x < \frac{5}{3}\pi$ ……カ，キ

よって，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，$\sin 2x > \sin x$ が成り立つような x の値の範囲は，

$0 < x < \frac{\pi}{3}$，$\pi < x < \frac{5}{3}\pi$ ……(＊)

(3)　$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$ ……③

$\sin 4x - \sin 3x$ において，$\begin{cases} \alpha+\beta = 4x \\ \alpha-\beta = 3x \end{cases}$ となる α，β は $\alpha = \frac{7}{2}x$，$\beta = \frac{x}{2}$ であり，

$\sin 4x - \sin 3x = 2\cos\frac{7}{2}x\sin\frac{x}{2}$

となるので，$\sin 4x - \sin 3x > 0$ が成り立つことは，$2\cos\frac{7}{2}x\sin\frac{x}{2} > 0$ が成り立つこと，すなわち，

「$\cos\frac{7}{2}x > 0$　かつ　$\sin\frac{x}{2} > 0$」 ……④　(……ⓐ，⑦) ……ク，ケ

または，

「$\cos\frac{7}{2}x < 0$　かつ　$\sin\frac{x}{2} < 0$」 ……⑤

が成り立つことと同値である。

$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，$\sin\frac{x}{2} \geqq 0$ であるから，$\sin 4x > \sin 3x$ が成り立つような x の値の範囲は，④のみを考えればよい。

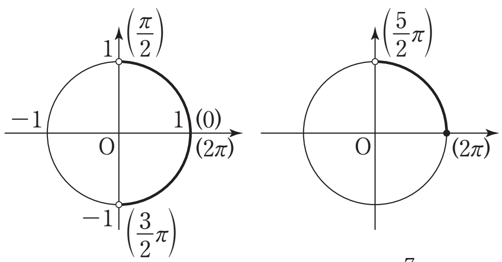
ここで，$0 \leqq x \leqq \pi$ より，$0 \leqq \frac{7}{2}x \leqq \frac{7}{2}\pi$ であるから，

$\cos\frac{7}{2}x > 0$ となる x の値の範囲は，

$0 \leqq \frac{7}{2}x < \frac{\pi}{2}$　または　$\frac{3}{2}\pi < \frac{7}{2}x < \frac{5}{2}\pi$

すなわち，

$0 \leqq x < \frac{\pi}{7}$　または　$\frac{3}{7}\pi < x < \frac{5}{7}\pi$



$0 \leqq x \leqq 2\pi$　　$2\pi \leqq x \leqq \frac{7}{2}\pi$

これと，$\sin\frac{x}{2} > 0$ となるのが $0 < x < \pi$ のときであることより，求める x の値の範囲は，

$0 < x < \frac{\pi}{7}$，$\frac{3}{7}\pi < x < \frac{5}{7}\pi$ ……コ，サ，シ，ス，セ

(4)　(2)，(3)の考察から，

$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，$\sin 3x > \sin 4x$ となる x の値の範囲は，

$\frac{\pi}{7} < x < \frac{3}{7}\pi$，$\frac{5}{7}\pi < x < \pi$ ……(オ)

次に，$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，$0 \leqq 2x \leqq 2\pi$ だから，

$\sin 4x > \sin 2x$　すなわち，$\sin 2 \cdot 2x > \sin 2x$

となる $2x$ の値の範囲が(＊)より，

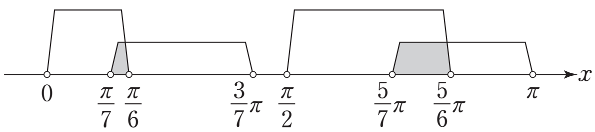
$$0 < 2x < \frac{\pi}{3},\ \pi < 2x < \frac{5}{3}\pi$$

すなわち，$\sin 4x > \sin 2x$ となる x $(0 \leqq x \leqq \pi)$ の値の範囲は，

$$0 < x < \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2} < x < \frac{5}{6}\pi \quad \cdots\cdots (カ)$$

以上より，$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，$\sin 3x > \sin 4x > \sin 2x$ が成り立つような x の値の範囲は，(オ)かつ(カ)より，

$$\frac{\pi}{7} < x < \underline{\underline{\frac{\pi}{6}}},\ \frac{5}{7}\pi < x < \underline{\underline{\frac{5}{6}}}\pi$$ ……ソ，タ，チ



〔2〕

(1)　$a^x=b$ となる x を $\log_a b$ と表すので，$x=\log_a b$ のとき，

$a^x=b$　(……②)　……ツ

が成り立つ。

(2)

(i)　対数の性質より，

$\log_5 25=\log_5 5^2=2\log_5 5=2\cdot 1=2$　……テ

また，底の変換公式より，

$$\log_9 27=\frac{\log_3 27}{\log_3 9}=\frac{\log_3 3^3}{\log_3 3^2}=\frac{3\log_3 3}{2\log_3 3}=\frac{3}{2}$$　……ト，ナ

(ii)　$\log_2 3$ が有理数であると仮定すると，$\log_2 3>0$ であるから，p，q を自然数として，

$$\log_2 3=\frac{p}{q}$$

と表すことができる。

このとき，(1)より $2^{\frac{p}{q}}=3$ であるから，この両辺を q 乗して，$\left(2^{\frac{p}{q}}\right)^q=3^q$ より，

$2^p=3^q$　(……⑤)　……ニ

と変形できる。

(iii)　a，b を 2 以上の自然数とするとき，$\log_a b$ が有理数と仮定する。つまり，$\log_a b>0$ より，p，q を自然数として，$\log_a b=\dfrac{p}{q}$ と表せると仮定すると，

$a^{\frac{p}{q}}=b$　すなわち，$a^p=b^q$

が成り立つことになる。

そこで，選択肢を見ると，⓪～④のどの仮定でも，さらに $a=b$ ととれば，$\log_a b=1$ となりこれは有理数とできるので，常に無理数とはいえない。

また，⑤については，$a^p=b^q$ において，右辺か左辺のいずれか一方のみが偶数で，もう一方が奇数となるので，この式は⑤の仮定の下では成立しない。

よって，

「a と b のいずれか一方が偶数で，もう一方が奇数ならば，$\log_a b$ は常に無理数である」(……⑤)　……ヌ

ことがわかる。

第 2 問

〔1〕

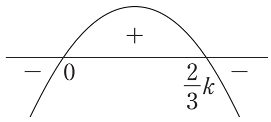
(1)　$y=x^2(k-x)$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は $x^2(k-x)=0$ の解より，求める共有点の座標は，

$(0,\ 0)$，$(k,\ 0)$　(……4)　……ア

である。

$f(x)=-x^3+kx^2$ より，

$f'(x)=-3x^2+2kx$　……イウ，エ



よって，

$$f'(x)=-3x\left(x-\frac{2}{3}k\right)$$

であるから，$f(x)$ の増減は右のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}k$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

これより，$f(x)$ は，

$x=0$ (……0) のとき，極小値 $f(0)=0$ (……0)　……オ，カ

$x=\frac{2}{3}k$ (……3) のとき，極大値 $f\left(\frac{2}{3}k\right)=\left(\frac{2}{3}k\right)^2\cdot\left(k-\frac{2}{3}k\right)=\frac{4}{27}k^3$ (……9)

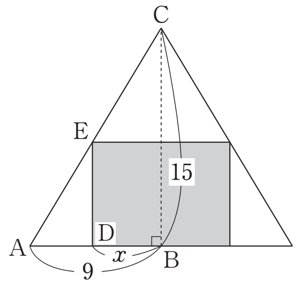
……キ，ク

をとる。

また，$0<x<k$ の範囲において，$x=\frac{2}{3}k$ のとき $f(x)$ は最大となる。

(2)　問題文の円錐を頂点と底面の中心を通る平面で切った断面において，右図のように点を定める。

$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$ より，



$$AB : AD = BC : DE$$

$$DE=\frac{BC}{AB}AD$$

$$=\frac{5}{3}AD$$

$$=\frac{5}{3}(9-x)$$

これより，円柱の体積 V は，

$V=\pi x^2\cdot\frac{5}{3}(9-x)=\frac{5}{3}\pi x^2(9-x)$　$(0<x<9)$　……ケ，コ，サ

(1)の考察により，$k=9$ のとき，$f(x)$ $(0<x<9)$ は $x=\frac{2}{3}\cdot9=6$ で，

最大値 $f(6)=6^2\cdot(9-6)=108$ をとることに注意すれば，$V=\frac{5}{3}\pi x^2(9-x)$ $(0<x<9)$ は，

$x=6$ のとき，最大値 $\frac{5}{3}\pi\cdot108=180\pi$　……シ，スセソ

をとる。

〔2〕

(1) $\displaystyle\int_0^{30}\left(\frac{1}{5}x+3\right)dx=\left[\frac{1}{10}x^2+3x\right]_0^{30}=\frac{1}{10}\cdot30^2+3\cdot30=90+90=\underline{\underline{180}}$ ……タチツ

また,

$\displaystyle\int\left(\frac{1}{100}x^2-\frac{1}{6}x+5\right)dx=\frac{1}{\underline{\underline{300}}}x^3-\frac{1}{\underline{\underline{12}}}x^2+\underline{\underline{5}}x+C$ （C は積分定数） ……テ～ネ

(2)

(i) $S(t)=\displaystyle\int_0^t f(x)dx$ として，$S(t)=400$ となる正の実数 t を考える。

$f(x)=\dfrac{1}{5}x+3$ のとき,

$$S(t)=\int_0^t\left(\frac{1}{5}x+3\right)dx=\left[\frac{1}{10}x^2+3x\right]_0^t=\frac{1}{10}t^2+3t$$

よって，求める t は,

$$\frac{1}{10}t^2+3t=400$$

$$t^2+30t-4000=0$$

より,

$$(t+80)(t-50)=0$$

よって,

$t>0$　より，$t=50$

これより，ソメイヨシノが開花するのは 2 月に入ってから,

50日後 （……$\underline{\underline{④}}$） ……ノ

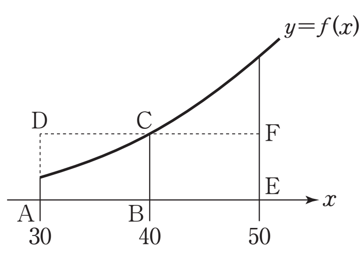
となる。

(ii) $0\leqq x\leqq30$ では,

$f(x)=\dfrac{1}{5}x+3$ ……①

$x\geqq30$ では,

$f(x)=\dfrac{1}{100}x^2-\dfrac{1}{6}x+5$ ……②



に対して，$x\geqq30$ では $f(x)$ が増加することから,

右図のように点を定めると，面積を比較することにより,

$$\int_{30}^{40}f(x)dx<\text{四角形 ABCD}=\text{四角形 BEFC}<\int_{40}^{50}f(x)dx$$

が分かる。

これより,

$$\int_{30}^{40} f(x)dx \leqq \int_{40}^{50} f(x)dx \quad (\cdots\cdots 0) \qquad \cdots\cdots ハ$$

である。これを用いて，$S(t)=400$ となる t を考える。

また，問題文から，

$$S(40)=\int_{0}^{40} f(x)dx=\int_{0}^{30} f(x)dx+\int_{30}^{40} f(x)dx=180+115=295$$

さらに，

$$\begin{aligned} S(50) &= S(40)+\int_{40}^{50} f(x)dx \\ &> S(40)+\int_{30}^{40} f(x)dx \\ &= 295+115 \\ &= 410 \end{aligned}$$

よって，$S(40)<400<S(50)$ であるから，$S(t)=400$ となる t は $40<t<50$ を満たす。すなわち，ソメイヨシノの開花時期は 2 月に入ってから，

40 日後より後，かつ 50 日後より前　(……4)　　……ヒ

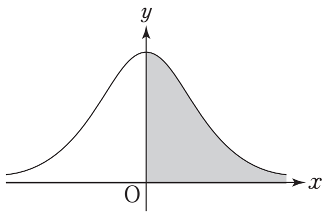
となる。

第 3 問

(1)

(i)　X が正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従い，$X \geqq m$ となる確率は，$\sigma>0$ より，$\dfrac{X-m}{\sigma} \geqq 0$ となる確率に一致し，

$$P(X \geqq m)=P\left(\frac{X-m}{\sigma} \geqq \underline{\underline{0}}\right) \qquad \cdots\cdots ア$$



これは，右図の網目部分の面積を表すので，

$$P(X \geqq m)=P\left(\frac{X-m}{\sigma} \geqq 0\right)=\underline{\underline{\frac{1}{2}}} \qquad \cdots\cdots イ，ウ$$

(ii)　標本平均 $\overline{X}$ の期待値 $E(\overline{X})$ は母平均に等しいので，

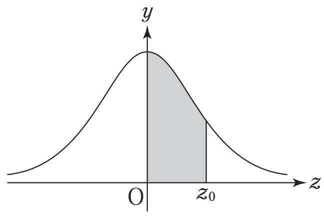
$$E(\overline{X})=m \quad (\cdots\cdots \underline{\underline{4}}) \qquad \cdots\cdots エ$$

また，$\overline{X}$ の標準偏差 $\sigma(\overline{X})$ は，

$$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\cdots\cdots \underline{\underline{2}}) \qquad \cdots\cdots オ$$

となる。

$n=400$，標本平均が 30.0 g，標本の標準偏差が 3.6 g のとき，$P(-z_0 \leqq z \leqq z_0)=0.901$ となる z_0 は，右図の斜線部の面積が，



$$\frac{0.901}{2}=0.4505$$

となるときで，正規分布表から，

$$z_0=\underline{\underline{1}}.\underline{\underline{65}} \qquad \cdots\cdots カ，キク$$

z_0	0.04	0.05	0.06
	⋮	⋮	⋮
1.6	0.4495	$\boxed{0.4505}$	0.4515

と読み取ることができる。

ここで，標本の大きさ $n=400$ は十分に大きいので，母標準偏差の代わりに，標本の標準偏差を用いて，

$$\sigma=3.6$$

とすることができる。

Z は $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\dfrac{30-m}{\dfrac{3.6}{20}}=\dfrac{20}{3.6}(30-m)$ によって標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うことから，m の信頼度 90.1 % の信頼区間は，

$$-1.65 \leqq \frac{20}{3.6}(30-m) \leqq 1.65$$

すなわち，

$$-0.33 \leqq \frac{10}{9}(30-m) \leqq 0.33 \quad より，\ -0.297 \leqq m-30 \leqq 0.297$$

よって，

$29.7 \leqq m \leqq 30.3$　（……④）　……ケ

(2)

(i) $m=30.0$ であるから，無作為に抽出した1個のピーマンの重さが平均 30.0 g 以下である確率は，

$\dfrac{1}{2}$　……コ，サ

よって，抽出した50個のピーマンのうち，Sサイズであるものの個数を表す確率変数 U_0 は二項分布 $B\left(50,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に従うので，ピーマン分類法で25袋を作れる確率 p_0 は，

$$p_0 = {}_{50}\mathrm{C}_{25} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{25} \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right)^{50-25}$$　……シス

(ii) ピーマンを無作為に $(50+k)$ 個抽出したとき，Sサイズのピーマンの個数を表す確率変数 U_k は二項分布 $B\left(50+k,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に従うが，$50+k$ は十分に大きいので，U_k は近似的に，正規分布

$$N\left((50+k)\cdot\frac{1}{2},\ (50+k)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\right) \quad \text{すなわち，} N\left(\frac{50+k}{2},\ \frac{50+k}{4}\right)$$　（……③，⑦）

……セ，ソ

に従う。

すると，$Y=\dfrac{U_k-\dfrac{50+k}{2}}{\sqrt{\dfrac{50+k}{4}}}$ とおくことで，Y は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。このことから，ピーマン分類法で25袋作ることができる確率 p_k は，Sサイズのピーマンが25個以上，$(25+k)$ 個以下，すなわち，$25 \leqq U_k \leqq 25+k$ である確率であるから，

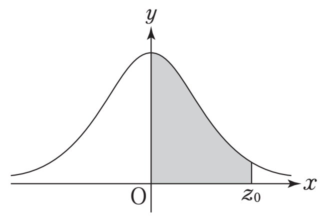
よって，

$$p_k = P(25 \leqq U_k \leqq 25+k) = P\left(-\frac{k}{\sqrt{50+k}} \leqq Y \leqq \frac{k}{\sqrt{50+k}}\right)$$　（……⓪）　……タ

となる。

そこで，$k=\alpha$，$\sqrt{50+k}=\beta$ として，$p_k \geqq 0.95$ となるような $\dfrac{\alpha}{\beta}$ について考える。

正規分布表から，右図の斜線部の面積が，$\dfrac{0.95}{2}=0.475$ となる z_0 の値を読み取ると，



$z_0=1.96$

であるから，

$\dfrac{\alpha}{\beta} \geqq 1.96$ を満たせばよいことがわかる。

ここでは，$\dfrac{\alpha}{\beta} \geqq 2$ ……① となる自然数 k を考えることにすると，

$\alpha \geqq 2\beta$　より　$\alpha^2 \geqq 4\beta^2$

よって，

$k^2 \geqq 4(50+k)$　より　$k^2-4k-200 \geqq 0$

これを解くと，$k^2-4k-200=0$ の解が $k=2\pm2\sqrt{51}$ より，$k>0$ と合わせて，

$k \geqq 2+2\sqrt{51}$

$\sqrt{51}=7.14$ とすると，$k \geqq 2+2\times7.14=16.28$ であるから，①を満たす最小の自然数 k_0 は，

$k_0=\underline{\underline{17}}$　……チツ

以上より，$p_k \geqq 0.95$ となるためには，少なくとも，$50+17=67$（個）のピーマンを抽出しておけばよいことが分かる。

第 4 問

(1)　$a_2=1.01a_1+p$，$a_3=1.01a_2+p$，…… となるので，$a_1=10+p$ より，

$$a_3=1.01a_2+p$$
$$=1.01(1.01a_1+p)+p$$
$$=1.01\{1.01(10+p)+p\}+p \quad (\cdots\cdots 2)$$ ……ア

同様に考えると，すべての自然数 n について，

$$a_{n+1}=1.01a_n+p \quad (\cdots\cdots 0,\ 3)$$ ……イ，ウ

が成り立ち，これは，

$$a_{n+1}+100p=1.01(a_n+100p) \quad \cdots\cdots(*) \quad (\cdots\cdots 4,\ 0)$$ ……エ，オ

と変形できる。

このことを利用して，a_n を求めることができる。

また，もともとの 10 万円，1 年目の初めに入金したお金，2 年目の初めに入金したお金，……のように，入金された時期の異なるお金がどのように増えていくかを考えることでも，a_n を求めることができる。

もともとの 10 万円は，n 年目には $10\times1.01^{n-1}$ 万円になる。

1 年目の初めに入金した p 万円は，毎年 1.01 倍になり，2 年目から n 年目までの $n-1$ 回利息がつくから，n 年目の初めには，

$$p\times1.01^{n-1} \text{ 万円} \quad (\cdots\cdots 2)$$ ……カ

になる。

2 年目の初めに入金した p 万円は，3 年目から n 年目までの $n-2$ 回利息がつくから，n 年目の初めには，

$$p\times1.01^{n-2} \text{ 万円} \quad (\cdots\cdots 3)$$ ……キ

になる。

⋮

n 年目の初めに入金した p 万円は，n 年目の初めには p 万円のままである。

このようにして，k 年目の初めに入金した p 万円の増え方で，n 年目の初めの全預金額を考えると，

$$a_n=10\times1.01^{n-1}+p\times1.01^{n-1}+p\times1.01^{n-2}+\cdots\cdots+p$$
$$=10\times1.01^{n-1}+p(1+1.01+1.01^2+\cdots\cdots+1.01^{n-2}+1.01^{n-1})$$
$$=10\times1.01^{n-1}+p\sum_{k=1}^{n}1.01^{k-1} \quad (\cdots\cdots 2)$$ ……ク

となる。

ここで，

$$\sum_{k=1}^{n}1.01^{k-1}=\frac{1.01^n-1}{1.01-1}=\frac{1.01^n-1}{\frac{1}{100}}=100(1.01^n-1) \quad (\cdots\cdots 1)$$ ……ケ

となるので，これにより，

$$a_n=10\times1.01^{n-1}+100p(1.01^n-1) \quad \cdots\cdots(**)$$

と求めることができる。

(2)　(＊)において，$a_n+100p=b_n$ とおくと，$b_1=a_1+100p=10+101p$ で，$\{b_n\}$ は，

$$b_{n+1}=1.01b_n$$

を満たすので，数列 $\{b_n\}$ は，初項 $10+101p$ で，公比 1.01 の等比数列である。よって，

$$b_n=b_1\times1.01^{n-1}=(10+101p)\times1.01^{n-1}$$

よって，

$$a_n+100p=(10+101p)\times1.01^{n-1}$$ より，$$a_n=(10+101p)\times1.01^{n-1}-100p$$

と求められる。

また，(＊＊)より，

$$a_n=10\times1.01^{n-1}+100p\times1.01^n-100p$$
$$=(10+101p)\times1.01^{n-1}-100p$$

と同じものを得る。

10 年目の終わりの預金が 30 万円以上であることを不等式を用いて表すと，

$1.01a_{10}\geqq30$　(……③)　……コ

となる。よって，

$$1.01\{(10+101p)\times1.01^9-100p\}\geqq30$$

より，

$$10\times1.01^{10}+101p\times1.01^{10}-101p\geqq30$$

p について整理すると，

$$101(1.01^{10}-1)p\geqq30-10\times1.01^{10}$$

すなわち，

$p\geqq\dfrac{30-10\times1.01^{10}}{101(1.01^{10}-1)}$　……サシ，スセ

となる。

(3)　1 年目の入金を始める前の預金が 10 万円ではなく，13 万円＝10 万円＋ 3 万円の場合は，(1)の**方針 2** と同様の考え方で，3 万円が n 年目の初めまでの増えた分だけ多くなる。

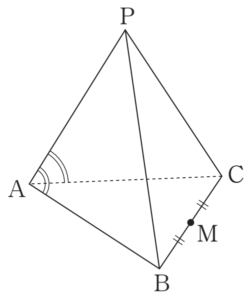
よって，この場合の n 年目の初めの預金は，10 万円のときと比べて，

$3\times1.01^{n-1}$ 万円　(……⑧)　……ソ

だけ多くなる。

第 5 問

(1)　M は辺 BC の中点であるから，



$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$ ……ア，イ，ウ，エ

と表せる。また，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\angle\mathrm{PAB},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\angle\mathrm{PAC}$$

より，

$$\cos\angle\mathrm{PAB}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|},\quad \cos\angle\mathrm{PAC}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}$$

であるから，$\angle\mathrm{PAB}=\angle\mathrm{PAC}=\theta$ に着目すると，

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\cos\theta$$ ……①　(……1)　……オ

である。

(2)　$\theta=45°$，$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=3\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=3$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=3$

のとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta=3\sqrt{2}\times3\times\cos45°$$

だから，①と合わせて，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=3\sqrt{2}\times3\times\frac{1}{\sqrt{2}}=9$$ ……カ

である。

$\angle\mathrm{APD}=90°$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}}=0$$

である。

ここで，点 D は直線 AM 上にあるから，実数 s を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=s\,\overrightarrow{\mathrm{AM}}$$
$$=\frac{s}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})$$

と表せる。

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}-|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2$$
$$=\frac{s}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})-|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2$$
$$=\frac{s}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})-|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2$$

$$=\frac{s}{2}\times(9+9)-(3\sqrt{2})^2$$

$$=9s-18$$

であるから，

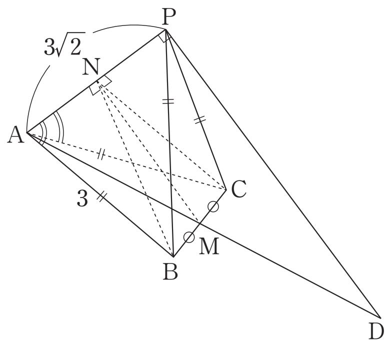
$9s-18=0$　すなわち，$s=2$

よって，

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=2\,\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ ……キ

である。

【設問キの別解】



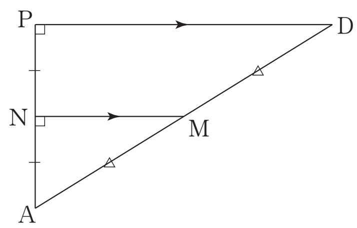
$\triangle$ABP と $\triangle$ACP は二等辺三角形であるから B，C それぞれから AP に下ろした垂線と AP の交点は辺 AP の中点 N である。このとき，AP は平面 BCN に垂直であるから MN とも垂直で，

$\angle\mathrm{ANM}=90^\circ$

よって，$\angle\mathrm{APD}=90^\circ$ のとき，

$\mathrm{PD}/\!/\mathrm{NM}$，$\mathrm{AN}=\mathrm{NP}$

であるから，中点連結定理によって，M は AD の中点である。



よって，

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=2\,\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ ……キ

である。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=2\,\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ で定まる点 Q が $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ であることを考える。

(i)　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=2\,\overrightarrow{\mathrm{AM}}$

$$=2\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

$$=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

となる。$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$$

すなわち，

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$　……(＊)　(……⓪)　……ク

が成り立つ。

さらに①に注意すると，この式より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2$$

となるから，この式の両辺を $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\,(\neq 0)$ で割ると，

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$　……(＊＊)　(……③)　……ケ

が成り立つ。

逆に(＊＊)が成り立てば，両辺に $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$ をかけることで，(＊)が成り立つので，これより $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ がわかる。

(ii)　$k>0$ に対して，

$$k\,\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

が成り立つとき，

$$k|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta$$

であるから，

$k|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$　(……⓪)　……コ

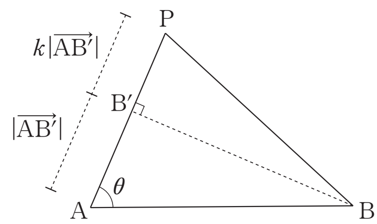
が成り立つ。

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ であることは，(＊＊)が成り立つことと同値であるから，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta+k|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$$

よって，

$$(1+k)|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$$



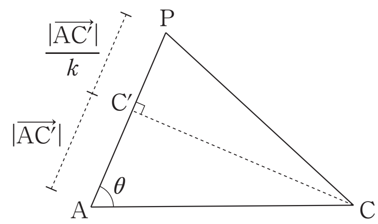
ここで，点 B′ の定義より，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AB'}}|$ であるから，

$$(1+k)|\overrightarrow{\mathrm{AB'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$$

となり，B′ は辺 AP を $1:k$ に内分する点である。

次に，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\dfrac{1}{k}|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ と(＊＊)より，

$$\frac{1}{k}|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$$



であるから，

$$\frac{k+1}{k}|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$$

ここで，点 C′ の定義より，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AC'}}|$ であるから，

$$\frac{k+1}{k}|\overrightarrow{\mathrm{AC'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\quad \text{すなわち，}\ |\overrightarrow{\mathrm{AC'}}|=\frac{k}{k+1}|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$$

となる。これは C′ が辺 AP を $k:1$ に内分していることを意味する。

よって，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ は，

B′ と C′ が線分 AP をそれぞれ $1:k$ と $k:1$ に内分する点　(……④)　……サ

であることと同値である。

特に $k=1$ のとき，B′，C′ は共に辺 AP の中点だから，B，C は辺 AP の垂直二等分線上の点といえる。

よって，これは，

△PAB と △PAC がそれぞれ BP＝BA，CP＝CA を満たす二等辺三角形　(……②)

……シ

であることと同値である。