2025年度大学入学共通テスト 解説〈数学Ⅱ・B・C〉

第１問

(1)(i)

$\alpha=\theta+\dfrac{\pi}{6}$, $\beta=2\theta$ より，

$$\alpha=\beta$$
$$\Leftrightarrow \theta+\frac{\pi}{6}=2\theta$$
$$\Leftrightarrow \theta=\underline{\underline{\frac{\pi}{6}}}$$
……ア

である。また，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\sin 2\theta$$
$$=\sin\frac{\pi}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{\underline{\underline{3}}}}{\underline{\underline{2}}}$$
……イ，ウ

となる。

(ii)

点P, Qの y 座標はそれぞれ $\sin\alpha$, $\sin\beta$ であるため，②が成り立つときに，

点Pの y 座標と，点Qの y 座標が等しい（……②）　……エ

という関係がつねに成り立つ。

(iii)

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の場合を考える。このとき，$0\leqq\beta\leqq\pi$ であるので，点Qは $y\geqq 0$ にある。また，

$0<\dfrac{\pi}{6}\leqq\alpha\leqq\dfrac{2}{3}\pi<\pi$ であり，$\theta\neq\dfrac{\pi}{6}$ より $\alpha\neq\beta$ であるため，②が成り立つとき(ii)より点P, Qは y 軸対称である。以上のことから，α と β は

$$\beta=\pi-\alpha$$
$$\therefore \alpha+\beta=\underline{\underline{\pi}}$$
（……②）　……オ

を満たす。よって，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のときの①の解

$$\alpha+\beta=\pi$$
$$\Leftrightarrow \left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+2\theta=\pi$$
$$\therefore \theta=\frac{5}{18}\pi$$ ……カ，キク

を得る。

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ の場合を考える。このとき，$\pi<\beta<2\pi$ であり，点Qは $y<0$ にある。また，$\frac{\pi}{2}<\frac{2}{3}\pi<\alpha<\frac{7}{6}\pi<\frac{3}{2}\pi$ であり，$\theta\neq\frac{\pi}{6}$ より $\alpha\neq\beta$ であるため，②が成り立つとき(ii)より点P, Qは y 軸対称である。以上のことから，α と β は

$$\beta-\pi=\pi-(\alpha-\pi)$$
$$\therefore \alpha+\beta=3\pi$$ (……⑥) ……ケ

を満たす。よって，$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ のときの①の解

$$\alpha+\beta=3\pi$$
$$\Leftrightarrow \left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+2\theta=3\pi$$
$$\therefore \theta=\frac{17}{18}\pi$$ ……コサ，シス

を得る。

(2)

$0\leqq\theta<\pi$ のとき，方程式

$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\cos 2\theta \quad \cdots ③$$

を考える。$\alpha=\theta+\frac{\pi}{6}$, $\beta=2\theta$ より，③は

$$\cos\alpha=\cos\beta \quad \cdots ④$$

となる。$\alpha=\beta$ のとき④を満たすから，

$$\alpha=\beta$$
$$\Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{6}$$

は③の解の一つである。また，点P, Qの x 座標はそれぞれ $\cos\alpha$, $\cos\beta$ であるため，④が成り立つとき，点Pの x 座標と点Qの x 座標が等しいという関係が点Pと点Qの間につねに成り立つ。

次に，$\theta \neq \dfrac{\pi}{6}$ とし $0 \leqq \theta < \pi$ の場合を考える。このとき，$0 \leqq \beta < 2\pi$，$0 < \dfrac{\pi}{6} \leqq \alpha < \dfrac{7}{6}\pi < 2\pi$ であり，

$\theta \neq \dfrac{\pi}{6}$ より $\alpha \neq \beta$ であるため，④より点 P, Q は x 軸対称である。以上のことから，α と β は

$$\beta = 2\pi - \alpha$$
$$\Leftrightarrow \alpha + \beta = 2\pi$$
$$\Leftrightarrow \left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + 2\theta = 2\pi$$

$$\therefore \theta = \frac{11}{18}\pi$$

を得る。以上より，方程式③の解は

$$\theta = \frac{\pi}{\underline{\underline{6}}}, \frac{\underline{\underline{\underline{11}}}}{\underline{\underline{\underline{18}}}}\pi$$ ……セ，ソタ，チツ

である。

第２問

(1)

水草Aの量は1日ごとにr倍になるから，3日でr^3倍となり，

$r^3=1.32$（……$\underline{\underline{③}}$）　……ア

を満たす。上式の両辺の常用対数をとると

$3\log_{10}r=\log_{10}1.32$

が成り立つ。ここで，常用対数表より

$\log_{10}1.32=0.1206$（……$\underline{\underline{①}}$）　……イ

であるから，

$3\log_{10}r=0.1206$

$\therefore \log_{10}r=0.\underline{\underline{0402}}$　……ウエオカ

が得られる。

(2)

作業の後に残す水草Aの量をa％としたとき，14日目の正午に水草Aの量はaの

r^{14}（……$\underline{\underline{③}}$）　……キ

倍になるから，14日目の正午に水草Aの量がちょうど60％になるとき

$a\times r^{14}=\underline{\underline{60}}$　……クケ

が成り立つ。上式の両辺の常用対数をとると

$\log_{10}a+14\log_{10}r=1+\log_{10}6$

となる。これに$\log_{10}r=0.0402$, $\log_{10}6=0.7782$を代入して

$\log_{10}a+14\cdot 0.0402=1+0.7782$

$\therefore \log_{10}a=1.2154$（……$\underline{\underline{③}}$）　……コ

となる。いま，常用対数表より

$\log_{10}16=1+\log_{10}1.6=1.2041$

$\log_{10}17=1+\log_{10}1.7=1.2304$

より，

$\log_{10}16<\log_{10}a<\log_{10}17$

$\therefore 16<a<17$

となるため，a以下で最大の整数は

$\underline{\underline{16}}$　……サシ

である。

第３問

(1)

$F(x)$ の導関数が $f(x)$ より，

$F'(x)=f(x)=\underline{\underline{6}}x^2+\underline{\underline{6}}x$ ……ア，イ

となる。$F'(x)=0$ とすると，$x=0,-1$ であることから増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	↗	$F(-1)$	↘	$F(0)$	↗

よって，$F(x)$ は

$x=\underline{\underline{-1}}$ ……ウエ

で極大値をとる。ここで，$G(x)$ の導関数が $f(x)$ であることから，

$G(x)=\int f(x)dx$

$=\underline{\underline{2}}x^3+\underline{\underline{3}}x^2+C$ （C は積分定数） ……オ，カ

となる。また，$G(x)$ の導関数が $F(x)$ の導関数と等しいことから，増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$G(x)$	↗	$G(-1)$	↘	$G(0)$	↗

このことから $G(x)$ は

$x=\underline{\underline{0}}$ ……キ

で極小値をとり，問題文から $x=k$ で極小値 0 を取ることがわかるから

$G(-1)=0$

$\Leftrightarrow C=\underline{\underline{-1}}$ ……クケ

と求められる。

(2)(ｉ)

問題文より，$F(x)$ は $x=0$ で極小値をとることから，

$f(x)=\underline{\underline{0}}$ ……コ

であり，その前後で符号は負から正に変わる(……⓪)とわかる。 ……サ

同様に，$G(x)$ が $x=k$ で極大値をとることから

$f(k)=\underline{\underline{0}}$ ……シ

であり，その前後で符号は正から負に変わる(……①)とわかる。 ……ス

よって，$F(0)=0$ であり，$k>0$ のとき $y=F(x)$ は $x<0,\ x>k$ で単調減少であり，$0 \leqq x \leqq k$ で単調増加であることから増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	k	$\cdots$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$F(x)$	↘	0	↗	$F(0)$	↘

したがって，グラフの概形は3となる。　……セ

（ii）

問題文より，$F(0)=0$ かつ $F'(x)=f(x)$ が成り立つことから

$$F(x)-F(0)=\int_0^x f(t)\,dt$$

$$\therefore F(x)=\int_0^x f(t)\,dt \ (\cdots\cdots 3,\ 0)$$　……ソ，タ

と表せる。（i）より，$y=F(x)$ は $x=k$ で極大値をとることから，$F(x)$ の極大値は

$$\int_0^k f(t)\,dt \ (\cdots\cdots 2,\ 0)$$　……チ，ツ

となる。（i）のグラフの概形において x 軸と $y=f(x)$ の交点は $x=0,\ k$ であり，$0 \leqq x \leqq k$ において $0 \leqq f(x)$ であることから $\int_0^k f(t)\,dt$ は関数 $y=f(x)$ $(\cdots\cdots 0)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積 $(\cdots\cdots 0)$ と等しい。　……テ，ト

同様に考えると，$G(k)=0$ かつ $G'(x)=f(x)$ が成り立つことからすべての実数に対して

$$G(x)-G(k)=\int_k^x f(t)\,dt$$

$$\therefore G(x)=\int_k^x f(t)\,dt$$

が成り立ち，（i）より $y=G(x)$ は $x=0$ で極小値をとることから，$G(x)$ の極小値は

$$\int_k^0 f(t)\,dt=-\int_0^k f(t)\,dt$$

と求められ，$F(x)$ の極大値は $G(x)$ の極小値の -1 倍 $(\cdots\cdots 2)$ と等しいことがわかる。　……ナ

第４問

(1)

直線 $x=2$ 上の格子点で T の内部にあるものは，点 $(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5)$ の5個である。点 $(2,0)$ と点 $(2,6)$ は T の境界にあるため，内部にはない。よって，

$a_2=\underline{\underline{5}}$ ……ア

である。また，直線 $x=3$ 上の格子点で T の内部にあるものは，点 $(3,1),(3,2),\ldots,(3,8)$ の8個である。点 $(3,0)$ と点 $(3,9)$ は T の境界にあるため，内部にはない。よって，

$a_3=\underline{\underline{8}}$ ……イ

である。以上より，数列 $\{a_n\}$ は

公差（……⓪）が $\underline{\underline{3}}$ の等差（……⓪）数列 ……ウ，エ，オ

である。したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned} a_n &= a_1+3(n-1)\\ &= 2+3(n-1)\\ &= 3n-1 \end{aligned}$$

であるから，T の内部にある格子点の個数は $1\leqq n\leqq 20$ であることに注意して

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{20} a_k &= \sum_{k=1}^{20}(3k-1)\\ &= 3\cdot\frac{1}{2}\cdot 20\cdot(1+20)-20\\ &= \underline{\underline{610}} \end{aligned}$$ ……カキク

である。

(2)

直線 $x=k$ 上の格子点で U の内部にあるものの個数は，点 $(k,1),(k,2),\ldots,(k,2^k-1)$ の

2^k-1（……⑦） ……ケ

である。点 $(k,0)$ と点 $(k,2^k)$ は U の境界にあるため，内部にはない。また，直線 $x=n$ が U の内部にある格子点を通るのは，$1\leqq k\leqq n$ のときである。したがって，U の内部にある格子点の個数は

$\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)$（……①） ……コ

$=2\cdot\dfrac{2^n-1}{2-1}-n$

$=2^{n+1}-n-2$（……⑦） ……サ

である。

(3)

$a>0,\ b^2-4ac<0$ のとき，すべての実数 x で $ax^2+bx+c>0$ を満たす。このとき k を自然数とする。直線 $x=k$ が V の内部にある格子点を通るとき，直線 $x=k$ 上の格子点で V の内部にあるものの個数は，点 $(k,1),(k,2),\ldots,(k,ak^2+bk+c-1)$ の $(ak^2+bk+c-1)$（個）である。点 $(k,0)$ と点 (k,ak^2+bk+c) は V の境界にあるため，内部にはない。また，直線 $x=k$ が V の内部にある格子点を通るのは，$1\leqq k\leqq n$ のときである。したがって，V の内部にある格子点の個数は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(ak^2+bk+c-1)&=a\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+b\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+(c-1)\cdot n\\&=\frac{a}{3}n^3+\frac{1}{2}(a+b)n^2+\left(\frac{a}{6}+\frac{b}{2}+c-1\right)n\end{aligned}$$

である。よって，すべての自然数 n に対して，V の内部にある格子点の個数が n^3 となるのは，

$$\begin{cases}\dfrac{a}{3}=1\\ \dfrac{1}{2}(a+b)=0\\ \dfrac{a}{6}+\dfrac{b}{2}+c-1=0\end{cases}$$

$\therefore a=\underline{\underline{3}},\ b=\underline{\underline{-3}},\ c=\underline{\underline{2}}$　　……シ，スセ，ソ

のときである。

第５問

(1)

今年収穫される1個のレモンの重さを確率変数 X で表すと，確率変数 X が正規分布 $N\left(110,\ 20^2\right)$ に従うとき，確率変数 $Z=\dfrac{X-110}{20}$ は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。よって，今年収穫されるレモンから無作為にレモン1個を抽出するとき，そのレモンがLサイズである確率は，正規分布表より

$$\begin{aligned} P(110 \leqq X < 140) &= P(110 \leqq X \leqq 140) \\ &= P(0 \leqq Z \leqq 1.50) \\ &= 0.\underline{\underline{4332}} \end{aligned}$$
……アイウエ

である。また，今年収穫されるレモンが20万個であるとし，その中のLサイズのレモンの個数を確率変数 Y で表すと，確率変数 Y は二項分布 $B(200000,\ 0.4332)$ に従うから，Y の平均(期待値)は

$200000 \cdot 0.4332 = 86640$ (……④)　……オ

となる。

(2)

母平均 mg，母標準偏差 σg の母集団から無作為に抽出した n 個のレモンの重さを確率変数 $W_1, W_2, \cdots, W_n$ で表すと，標本の大きさが十分に大きいとき，標本平均 $\overline{W}$ は近似的に正規分布

$N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ (……⑥)　……カ

に従い，確率変数 $Z'=\dfrac{\overline{W}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。また，正規分布表より

$$P(-1.96 \leqq Z' \leqq 1.96) = 0.95$$

であるから，m に対する信頼度95%の信頼区間は，

$$-1.96 \leqq \frac{\overline{W}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leqq 1.96$$

$$\therefore\ \overline{W}-\frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{W}+\frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}$$

より，信頼区間の幅は

$\overline{W}+\dfrac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}-\left(\overline{W}-\dfrac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\dfrac{3.92\sigma}{\sqrt{n}}$ (……⑤)　……キ

となる。したがって，母標準偏差が過去と同じ $\sigma=20$ であるとき，母平均に対する信頼度95%の信頼区間の幅を4g以下にする n は

$$\frac{3.92\cdot 20}{\sqrt{n}} \leqq 4$$
$$\Leftrightarrow (3.92\cdot 20)^2 \leqq 16n \left(\because \frac{3.92\cdot 20}{\sqrt{n}} > 0\right)$$
$$\Leftrightarrow n \geqq 384.16$$

を満たす。ゆえに，この不等式を満たす最小の自然数 n を n_0 とすると，

$n_0 = \underline{\underline{385}}$ ……クケコ

である。

(3)

今年収穫されるレモンの重さの母平均 mg が過去の平均 110g より軽いといえるかを，有意水準 5% (0.05) で仮説検定を行い検証するとき，統計的に検証したい仮説を対立仮説とするから，対立仮説は

「$m<110$」(……⓪) ……サ

である。帰無仮説「$m=110$」が正しいと仮定すると，標本の大きさ 400 は十分に大きいから，(2) の標本平均 $\overline{W}$ は近似的に正規分布

$N(110,1)$ (……⑤) ……シ

に従い，確率変数 $Z'=\overline{W}-110$ は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。無作為抽出した 400 個のレモンの重さの平均が 108.2g となったとき，確率 $P\left(\overline{W} \leqq 108.2\right)$ は正規分布表より

$$\begin{aligned} P\left(\overline{W} \leqq 108.2\right) &= P(Z' \leqq -1.8) \\ &= 0.5 - P(0 \leqq Z' \leqq 1.8) \\ &= 0.\underline{\underline{0359}} \end{aligned}$$ ……スセソタ

となる。この値をパーセント表示した値は有意水準 5% より小さいから，帰無仮説は棄却される(……①)。 ……チ

したがって，有意水準 5% で今年収穫されるレモンの重さの母平均は 110g より軽いと判断できる(……⓪)。 ……ツ

第６問

(1)

点 C は O を中心とする半径 1 の球面 S 上にあるから，中心 O からの距離が 1 である。言い換えると，

$$\left|\overrightarrow{OC}\right| = 1$$

である。よって，

$$\left|\overrightarrow{OC}\right|^2 = 1$$ ……ア

である。また，$C(x,\ y,\ z)$ より，$\left|\overrightarrow{OC}\right|^2 = 1$ をベクトル $\overrightarrow{OC}$ の成分を用いて表すと，

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

となる。さらに，$\triangle OAC \equiv \triangle OAB$ が成り立つとき，対応する角の大きさが等しいから，

$\angle AOC = \angle AOB$ である。よって，$\left|\overrightarrow{OC}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right|$, $\angle AOC = \angle AOB$ より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} &= \left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OC}\right|\cos\angle AOC \\ &= \left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\angle AOB \\ &= \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} \quad (\cdots\cdots ④)\end{aligned}$$ ……イ

が得られる。ここで，$A(1,\ 0,\ 0)$, $B\left(a,\ \sqrt{1-a^2},\ 0\right)$, $C(x,\ y,\ z)$ より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} &= 1\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z \\ &= x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} &= 1\cdot a + 0\cdot\sqrt{1-a^2} + 0\cdot 0 \\ &= a\end{aligned}$$

であるから，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ をベクトルの成分を用いて表すと，

$$x = a \quad (\cdots\cdots ⓪)$$ ……ウ

となる。同様に，$\triangle OBC \equiv \triangle OAB$ を用いると，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ が得られ，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} &= a\cdot x + \sqrt{1-a^2}\cdot y + 0\cdot z \\ &= ax + \sqrt{1-a^2}\,y\end{aligned}$$

であるから，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ をベクトルの成分を用いて表すと，

$$ax + \sqrt{1-a^2}\,y = a \quad (\cdots\cdots ⓪,\ ⑤)$$ ……エ，オ

となる。

(2)(ｉ)

$a = \dfrac{3}{5}$ のとき，$x = a$ と $ax + \sqrt{1-a^2}\,y = a$ に代入すると，

$$x=\frac{3}{5}$$ ……カ，キ

$$\frac{3}{5}x+\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}\,y=\frac{3}{5}$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{4}{5}y=\frac{3}{5}$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{3}{10}$$ ……ク，ケコ

となる。このとき，$x^2+y^2+z^2=1$ より，

$$z^2=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2-\left(\frac{3}{10}\right)^2$$
$$=\frac{11}{20}$$
$$z=\pm\sqrt{\frac{11}{20}}$$

である。これは，$-1\leqq z\leqq 1$ を満たすから，$x^2+y^2+z^2=1$ を満たす実数 z はちょうど2つ存在する。
よって，△ABC が正三角形となる S 上の点Cはちょうど2つある（……②）。 ……サ

(ii)

$a=-\frac{3}{5}$ のときも同様に，$x=a$ と $ax+\sqrt{1-a^2}\,y=a$ に代入すると，

$$x=-\frac{3}{5}$$

$$-\frac{3}{5}x+\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}\,y=-\frac{3}{5}$$
$$\Leftrightarrow \left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{4}{5}y=-\frac{3}{5}$$
$$\Leftrightarrow y=-\frac{6}{5}$$

となる。このとき，$x^2+y^2+z^2=1$ より，

$$z^2=1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2-\left(-\frac{6}{5}\right)^2$$
$$=-\frac{4}{5}$$

であるが，$z^2\geqq 0$ とならないから，実数 z は存在しない。よって，△ABC が正三角形となる S 上の点Cは存在しない（……⓪）ことがわかる。 ……シ

(3)

$x=a$ と $ax+\sqrt{1-a^2}\,y=a$ を x, y について解くと，

$$x=a,\ y=\frac{a(1-a)}{\sqrt{1-a^2}}$$

となる。このとき，$x^2+y^2+z^2=1$ より，

$$\begin{aligned}z^2&=1-x^2-y^2\\&=1-a^2-\left\{\frac{a(1-a)}{\sqrt{1-a^2}}\right\}^2\\&=\frac{(1-a^2)^2-a^2(1-a)^2}{1-a^2}\\&=\frac{(1-a^2)(1+a)(1-a)-a^2(1-a)^2}{(1+a)(1-a)}\\&=\frac{(1-a^2)(1+a)-a^2(1-a)}{1+a}\\&=\frac{1+a-2a^2}{1+a}\\&=\frac{(1-a)(1+2a)}{1+a}\quad(\cdots\cdots3)\end{aligned}$$

……ス

となる。△ABC が正三角形となる S 上の点 C が存在するとき，$z^2\geqq 0$ が必要である。$-1<a<1$ より，$1+a>0$ であるから，$z^2\geqq 0$ のとき $(1-a)(1+2a)\geqq 0$ が成り立つ。逆に，$(1-a)(1+2a)\geqq 0$ が成り立つとき，$(x,\ y,\ z)=\left(a,\ \frac{a(1-a)}{\sqrt{1-a^2}},\ \sqrt{\frac{(1-a)(1+2a)}{1+a}}\right)$ とすれば△ABC は正三角形になる。以上より，

$(1-a)(1+2a)\geqq 0$ と $-1<a<1$ を合わせた $-\frac{1}{2}\leqq a<1$ （……4）が△ABC が正三角形となる S 上の点 C が存在するための必要十分条件である。

……セ

第７問

(1)

$\alpha=3+2i,\ \beta=7,\ \gamma=7+10i$ より，

$$\gamma-\alpha=(7+10i)-(3+2i)$$
$$=\underline{\underline{4}}+\underline{\underline{8}}i \quad \cdots\cdots ア，イ$$
$$\beta-\alpha=7-(3+2i)$$
$$=\underline{\underline{4}}-\underline{\underline{2}}i \quad \cdots\cdots ウ，エ$$

であるから，

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{4+8i}{4-2i}$$
$$=\frac{4(1+2i)\cdot(2+i)}{2(2-i)\cdot(2+i)}$$
$$=\frac{2\cdot 5i}{5}$$
$$=\underline{\underline{2i}} \quad (\cdots\cdots \underline{\underline{③}}) \quad \cdots\cdots オ$$

である。また，

$$2i=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

より，$2i$ の偏角は

$$\frac{\pi}{2} \quad (\cdots\cdots \underline{\underline{④}}) \quad \cdots\cdots カ$$

である。

(2)

w の偏角が $\dfrac{\pi}{2}$ または $\dfrac{3}{2}\pi$ のとき，

$$\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$$
$$\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi=-i$$

より，w は

純虚数(実部が 0 である虚数)（……$\underline{\underline{②}}$）　……キ

である。また，w の実部は $\dfrac{w+\overline{w}}{2}$ と表されるため，

$$\frac{w+\overline{w}}{2}=0$$
$$\therefore w+\overline{w}=\underline{\underline{0}} \quad (\cdots\cdots \underline{\underline{⓪}}) \quad \cdots\cdots ク$$

である。

(3)(i)

$z \neq 0, 2, -2$ のとき，

$$\left(1+\frac{2}{z}\right)+\overline{\left(1+\frac{2}{z}\right)}=0$$
$$\Leftrightarrow 2+\frac{2}{z}+\frac{2}{\overline{z}}=0$$
$$\Leftrightarrow 2z\overline{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}\right)=0 \ (\because z\overline{z}\neq 0)$$
$$\Leftrightarrow z\overline{z}+\overline{z}+z=0$$
$$\Leftrightarrow z\overline{z}+\overline{z}+z+1=1$$
$$\Leftrightarrow (z+1)(\overline{z}+1)=1$$
$$\Leftrightarrow |z+1|^2=1$$
$$\Leftrightarrow |z+1|=1 \ (\because |z+1| \geqq 0)$$

となるため，直線 AB と直線 AC が垂直に交わるための必要十分条件は

$|z+1|=1$　(……6)　　……ケ

である。したがって，複素数平面において，直線 AB と直線 AC が垂直に交わるような点 z 全体は，点 -1 を中心とした半径1の円から 2 点 $0, -2$ を除いた部分であり，図示すると0である。　……コ

(ii)

$\alpha'=-\alpha, \beta'=-\beta, \gamma'=-\gamma$ より，

$$\frac{\gamma'-\alpha'}{\beta'-\alpha'}=\frac{(-\gamma)-(-\alpha)}{(-\beta)-(-\alpha)}=\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$$

となるため，(i)より，複素数平面において，直線 A′B′ と直線 A′C′ が垂直になるような点 z 全体は点 -1 を中心とした半径1の円から 2 点 $0, -2$ を除いた部分であり，求める図は0である。　……サ

(iii)

$z'=-z$ とすると，$\alpha''=z', \beta''=2, \gamma''=\dfrac{4}{z'}$ となるため，(i)より，複素数平面において，直線 A″B″ と直線 A″C″ が垂直になるような点 z' 全体は，点 -1 を中心とした半径1の円から 2 点 $0, -2$ を除いた部分である。よって，直線 A″B″ と直線 A″C″ が垂直になるような点 z 全体は，点 z' 全体を図示したものを y 軸に関して線対称に移動した図形であり，点1を中心とした半径1の円から 2 点 $0, 2$ を除いた部分となる。したがって，図示すると1である。　……シ