

2025 年度大学入学共通テスト 解説〈数学 I・A〉

第 1 問

〔1〕

(1)

$a=1$ のとき、①の左辺は、

$$4bx^2 + 16x - b - 8 = (4x^2 - 1)b + 16x - 8 \quad \cdots \textcircled{2}$$

と表せる。よって、②を因数分解すると、

$$\begin{aligned} (4x^2 - 1)b + 16x - 8 &= (2x - 1)(2x + 1)b + 8(2x - 1) \\ &= (2x - 1)\{(2x + 1)b + 8\} \end{aligned}$$

$$= (2x - 1)(\underline{2}bx + b + \underline{8}) \quad \cdots \text{ア, イ}$$

となる。

(2)(i)

$b=2$ のとき、①の左辺を因数分解すると、

$$(2a + 6)x^2 + (5a + 11)x - 10 = (\underline{2}x + \underline{5})\{(a + \underline{3})x - \underline{2}\} \quad \cdots \text{ウ, エ, オ, カ}$$

となる。

(ii)

(i) より、 $a = 2\sqrt{2}$ のとき①の解は

$$(2x + 5)\{(2\sqrt{2} + 3)x - 2\} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}, \frac{2}{2\sqrt{2} + 3}$$

である。 $\frac{2}{2\sqrt{2} + 3}$ の分母を有理化すると、

$$\frac{2}{2\sqrt{2} + 3} = \frac{2(3 - 2\sqrt{2})}{(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})}$$

$$= \frac{6 - 4\sqrt{2}}{9 - 8}$$

$$= \underline{6} - \underline{4}\sqrt{2} \quad \cdots \text{キ, ク}$$

となる。

(iii)

[1] $a = -3$ のとき

(i) より ①は,

$$-2(2x+5)=0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$$

となり, ①の解は $x = -\frac{5}{2}$ だけである。

[2] $a \neq -3$ のとき

このとき, ①は,

$$(2x+5)\{(a+3)x-2\}=0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}, \frac{2}{a+3} (\because a \neq -3)$$

となる。 $a \neq -3$ のもとで①の解が $x = -\frac{5}{2}$ だけである必要十分条件は,

$$-\frac{5}{2} = \frac{2}{a+3}$$

$$\Leftrightarrow 5a+15 = -4 (\because a \neq -3)$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{19}{5}$$

である。

以上, [1], [2] より, ①の解が $x = -\frac{5}{2}$ だけであるのは $a = -3, -\frac{19}{5}$ のときである。よって, $a = -3$ で

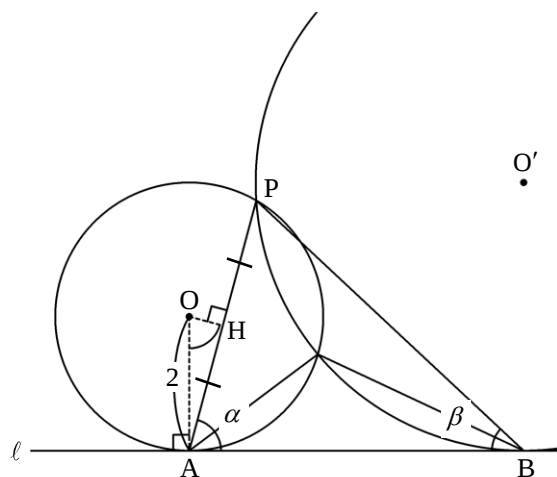
あることは, ①の解が $x = -\frac{5}{2}$ だけであるための

十分条件であるが, 必要条件ではない(……①)。

……ケ

〔2〕

(1)



条件より, $\angle OAB = 90^\circ$, $\angle OHA = 90^\circ$ である。したがって,

$$\begin{aligned}\angle AOH &= 90^\circ - \angle OAH \\ &= 90^\circ - (90^\circ - \angle PAB) \\ &= \angle PAB \\ &= \alpha\end{aligned}$$

となる。よって, $\triangle AOH$ に着目して,

$$\begin{aligned}AH &= OA \sin \angle AOH \\ &= 2 \sin \alpha\end{aligned}$$

……コ

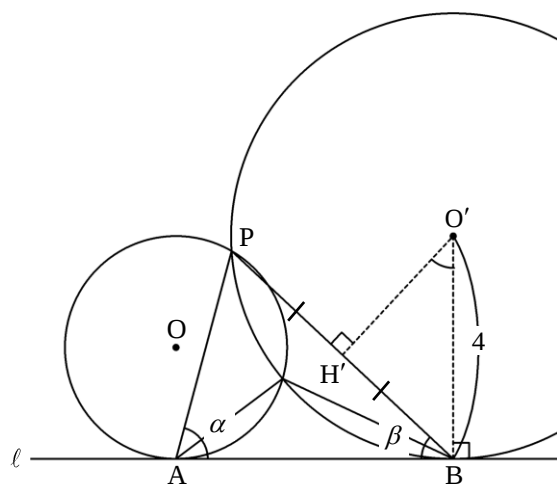
を得る。また,

$$PA = 2AH = 4 \sin \alpha$$

……①

……サ

となる。



同様にして, $\angle O'BA = 90^\circ$, $\angle OH'B = 90^\circ$ より,

$$\begin{aligned}\angle BO'H' &= 90^\circ - \angle O'BH' \\ &= 90^\circ - (90^\circ - \angle PBA) \\ &= \angle PBA \\ &= \beta\end{aligned}$$

となるから,

$$\begin{aligned}BH' &= O'B \sin \angle BO'H' \\ &= 4 \sin \beta\end{aligned}$$

$$PB = 2BH' = \underline{\underline{8 \sin \beta}} \quad \dots \textcircled{2} \quad \dots \text{シ}$$

となる。

また, $\triangle PAB$ の外接円の半径を R_1 とおくと, 正弦定理により

$$\begin{aligned}\frac{PA}{\sin \angle PBA} &= \frac{PB}{\sin \angle PAB} = 2R_1 \\ \Leftrightarrow \frac{PA}{\sin \beta} &= \frac{PB}{\sin \alpha} = 2R_1 (\dots \textcircled{1}, \textcircled{2}) \quad \dots \textcircled{3} \quad \dots \text{ス, セ}\end{aligned}$$

が成り立つので

$$PA \sin \alpha = PB \sin \beta \quad \dots \textcircled{4}$$

である。④に, ①と②を代入することにより

$$\begin{aligned}4 \sin^2 \alpha &= 8 \sin^2 \beta \\ \Leftrightarrow \sin \alpha &= \sqrt{\underline{\underline{2}}} \sin \beta (\because \sin \alpha > 0, \sin \beta > 0) \quad \dots \textcircled{5} \quad \dots \text{ソ}\end{aligned}$$

となる。また, ⑤を④に代入して,

$$PB = \sqrt{2} PA$$

となる。さらに, ①, ③, ⑤より,

$$\begin{aligned}\frac{PA}{\sin \beta} &= 2R_1 \\ \Leftrightarrow \frac{4 \sin \alpha}{\sin \beta} &= 2R_1 \\ \Leftrightarrow 4\sqrt{2} &= 2R_1 \\ \therefore R_1 &= \underline{\underline{2\sqrt{2}}} \quad \dots \text{タ, チ}\end{aligned}$$

が得られる。

(2)

$\angle QAB = \alpha'$, $\angle QBA = \beta'$ とおく。(1)と同様に計算すると,

$$\begin{cases} QA = 4 \sin \alpha' \\ QB = 8 \sin \beta' \\ \frac{QA}{\sin \angle QBA} = \frac{QB}{\sin \angle QAB} = 2R_2 \end{cases}$$

が成り立つ。これを解くと $R_2 = 2\sqrt{2}$ が得られるから、

$$R_1 = R_2 (\cdots \cdots \underline{\underline{\textcircled{1}}})$$

……ツ

とわかる。さらに、 $\triangle PAB, \triangle QAB$ に関する正弦定理により、

$$\begin{cases} \frac{AB}{\sin \angle APB} = 2R_1 \\ \frac{AB}{\sin \angle AQB} = 2R_2 \end{cases}$$

であるから、

$$\sin \angle APB = \sin \angle AQB (\cdots \cdots \underline{\underline{\textcircled{1}}})$$

……テ

とわかる。

(3)

(2) より $\frac{AB}{\sin \angle APB} = 2R_1$ であるから、

$$\begin{aligned} \sin \angle APB &= \frac{AB}{2R_1} \\ &= \frac{2\sqrt{7}}{2 \cdot 2\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{14}}{4} \end{aligned}$$

……トナ、ニ

である。したがって、

$$\begin{aligned} \cos \angle APB &= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{14}}{4} \right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

である。これと、(1) より $PB = \sqrt{2}PA$ であるから、 $\triangle PAB$ に関する余弦定理により、

$$AB^2 = PA^2 + PB^2 - 2PA \cdot PB \cdot \cos \angle APB$$

$$\Leftrightarrow 28 = PA^2 + 2PA^2 - PA^2$$

$$\therefore PA = \sqrt{\underline{\underline{14}}}$$

……ヌネ

となる。

第2問

〔1〕

(1)

仮定1より C_1 は点 $(0, 1)$ を通るから

$$c = \underline{\underline{1}}$$

……ア

である。また、 C_1 は2点 $\left(-\frac{5}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ を通ることより、 $y = ax^2 + bx + 1$ に代入すると

$$\begin{cases} \frac{25}{4}a - \frac{5}{2}b + 1 = 0 \\ \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{5} \\ b = -\frac{8}{5} \end{cases}$$

がわかるから、

$$C_1: y = -\frac{4}{5}x^2 - \frac{8}{5}x + 1$$

……イ, ウ, エ, オ

である。これは、

$$\begin{aligned} y &= -\frac{4}{5}x^2 - \frac{8}{5}x + 1 \\ &= -\frac{4}{5}(x^2 + 2x) + 1 \\ &= -\frac{4}{5}(x+1)^2 + \frac{9}{5} \end{aligned}$$

と変形できるから、 C_1 の頂点の x 座標は -1 、 y 座標は

$$\underline{\underline{\frac{9}{5}}}$$

……カ, キ

である。

仮定1より、 C_3 は y 軸に対して C_1 と対称であるから、 C_3 の頂点は $\left(1, \frac{9}{5}\right)$ である。仮定2より、 C_2 は

C_1 の頂点 $\left(-1, \frac{9}{5}\right)$ および C_3 の頂点 $\left(1, \frac{9}{5}\right)$ を通るから、 C_2 の方程式は実数 $\alpha (\neq 0)$ を用いて、

$$y - \frac{9}{5} = \alpha(x-1)(x+1) \quad \cdots \textcircled{1}$$

と表せる。また、 C_2 は $P_2\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ を通るから、

$$\begin{aligned} -\frac{9}{5} &= \alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow \alpha &= -\frac{36}{25} \end{aligned}$$

となる。よって、 C_2 の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= -\frac{36}{25}(x-1)(x+1) + \frac{9}{5} \\ &= -\frac{36}{25}x^2 + \frac{81}{25} \end{aligned}$$

であり、 C_2 の頂点の y 座標は

$$\frac{81}{25}$$

……クケ、コサ

であることがわかる。したがって、

$$\frac{\frac{81}{25}}{\frac{9}{5}} = \frac{9}{5} = 1.8$$

より、

大きな噴水の高さは、小さな噴水の高さのおよそ2倍(……⑩)である。

……シ

(2)

仮定2'のもとでも C_2 の方程式は①のように表せる。①は

$$\begin{aligned} y - \frac{9}{5} &= \alpha(x-1)(x+1) \\ \Leftrightarrow y &= \alpha x^2 - \alpha + \frac{9}{5} \end{aligned}$$

と変形でき、仮定2'より C_2' の頂点の y 座標は5であるから、

$$-\alpha + \frac{9}{5} = 5 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{16}{5}$$

となる。このとき、 C_2 の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -\frac{16}{5}x^2 + 5 \\ &= -\frac{16}{5}\left(x - \frac{5}{4}\right)\left(x + \frac{5}{4}\right) \end{aligned}$$

であるから、 $P_2'\left(\frac{5}{4}, 0\right)$ となる。よって、

P_2' は $P_2\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ より $\frac{1}{4}$ だけ P_1 (……⑩)の方にある。

……ス、セ、ソ

[2]

(1)(i)

東進ハイスクール 東進衛星予備校

図1より、外国人宿泊者数が100を超え、かつ日本人宿泊者数が2500を超える都道府県は2つ存在する。また、日本人宿泊者数が外国人宿泊者数の10倍未満である都道府県とは、図1の破線に対して下側にプロットされる都道府県である。その個数は1つで、その割合は50%未満である。以上より、

(a), (b)はともに正しい。(……④) ……タ

(ii)

表1のデータは47個あるから、第1四分位数は都道府県P12の日本人宿泊者数351、第3四分位数は都道府県P36の日本人宿泊者数1251である。よって、四分位範囲は

$1251 - 351 = 900$ (……④) ……チ

となる。外れ値は、 $351 - 1.5 \times 900 = -999$ 以下および $1251 + 1.5 \times 900 = 2601$ 以上の値である。したがって、外国人宿泊者数と日本人宿泊者数の両方で外れ値となる都道府県は

P45, P46, P47 の3つ ……ツ

である。

(2)

$$\begin{aligned} s_z^2 &= \frac{1}{47} \left\{ (z_1 - \bar{z})^2 + (z_2 - \bar{z})^2 + \cdots + (z_{47} - \bar{z})^2 \right\} \\ &= \frac{1}{47} \left[\left\{ (x_1 - \bar{x}) + (y_1 - \bar{y}) \right\}^2 + \left\{ (x_2 - \bar{x}) + (y_2 - \bar{y}) \right\}^2 + \cdots + \left\{ (x_{47} - \bar{x}) + (y_{47} - \bar{y}) \right\}^2 \right] \\ &= \frac{1}{47} \left\{ (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_{47} - \bar{x})^2 \right\} \\ &\quad + \frac{1}{47} \left\{ (y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \cdots + (y_{47} - \bar{y})^2 \right\} \\ &\quad + 2 \cdot \frac{1}{47} \left\{ (x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + \cdots + (x_{47} - \bar{x})(y_{47} - \bar{y}) \right\} \\ &= s_x^2 + s_y^2 + 2s_{xy} \text{ (……④)} \end{aligned} \quad \text{……テ}$$

となる。よって、 x と y の間に正の相関があるとき $s_{xy} > 0$ であるから、

$$s_z^2 > s_x^2 + s_y^2 \text{ (……④)} \quad \text{……ト}$$

が成り立つ。

(3)

実験結果より、35枚の硬貨のうち23枚以上が表となった割合は、

$$2.4 + 0.9 + 0.5 + 0.4 + 0.1 = 4.3 (\%) \quad \text{……ナ, ニ}$$

である。したがって、仮説のもとで35人のうち23人以上が「キャンペーンAの方がよい」と回答する確率は4.3%であるから、方針より、

東進ハイスクール 東進衛星予備校

仮説は誤っている (……①)又
と判断する。よって、今回のアンケート結果からは、
キャンペーン A の方がよいと思っている人が多いといえる。(……①)ネ

第3問

(1)

直線 AD は平面 ABED と平面

ACFD (……②)

……ア

との交線である。また、直線 BE は平面 ABED と平面

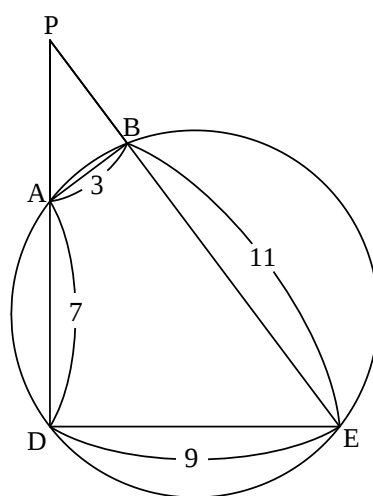
BCFE (……③)

……イ

との交線である。

(2)(i)

三角形 PAB, PED と 4 点 A, B, E, D を通る円を図示すると次図のようになる。



$\angle APB = \angle EPD$, $\angle PAB = \angle PED$ より、三角形 PAB と PED は相似であり、その相似比は

$$AB : ED = 3 : 9 = 1 : 3$$

……ウ

である。したがって、 $PE = 3PA$, $PD = 3PB$ であるから、

$$PE = PB + BE$$

$$\Leftrightarrow 3PA = PB + 11$$

……エオ

$$PD = PA + AD$$

$$\Leftrightarrow 3PB = PA + 7$$

……カ

が成り立つ。これらを PA と PB の連立方程式とみて解くと

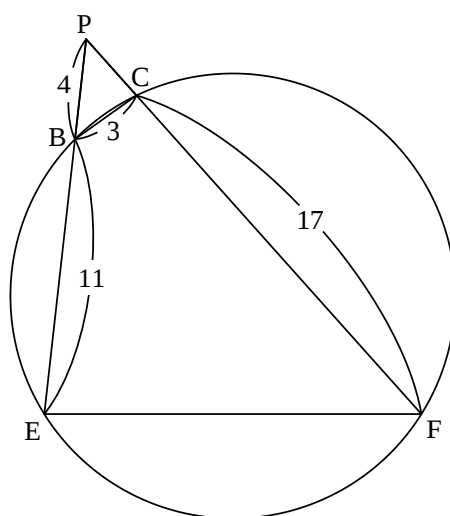
$$PA = 5, PB = 4$$

……キ, ク

となる。

(ii)

平面 BCFE と球面 S が交わる部分は 4 点 B, C, F, E を通る円となる。この円と三角形 PBC, PFE を図示すると次図のようになる。



直線 BE と直線 CF について，方べきの定理より

$$PB \cdot PE = PC \cdot PF$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot (4 + 11) = PC \cdot (PC + 17)$$

$$\Leftrightarrow PC^2 + 17 \cdot PC - 60 = 0$$

$$\Leftrightarrow (PC + 20)(PC - 3) = 0$$

$$\therefore PC = \underline{\underline{3}} \quad (\because PC > 0)$$

……ケ

となる。 $\angle BPC = \angle FPE$, $\angle PBC = \angle PFE$ より，三角形 PBC と PFE は相似であり，その相似比は

$$PC : PE = 1 : 5$$

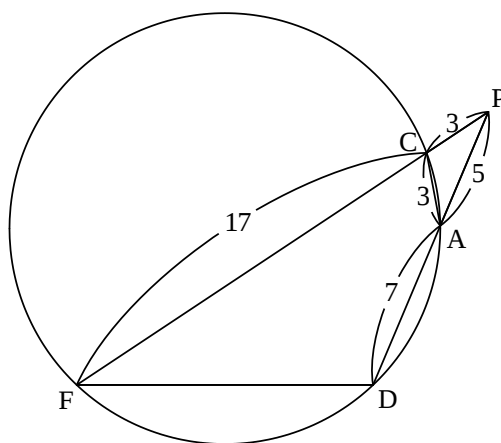
であるから

$$EF = 5 \cdot CB = \underline{\underline{15}}$$

……コサ

となる。

次に，三角形 PCA, PDF と 4 点 C, A, D, F を通る円を図示すると次図のようになる。



$\angle APC = \angle FPD$, $\angle PCA = \angle PDF$ より, 三角形 PCA と PDF は相似であり, その相似比は

$$PC : PD = 1 : 4$$

であるから

$$\therefore DF = 4 \cdot CA = \underline{\underline{12}}$$

……シス

となる。

(iii)

まず, $\angle ADE$, $\angle ADF$, $\angle EDF$ のそれぞれと 90° の大小関係を考える。 $PD = 12$, $PE = 15$, $DE = 9$ より, 三角形 PDE について $PE^2 = PD^2 + DE^2$ が成り立つから

$$\angle PDE = 90^\circ$$

$$\therefore \angle ADE = 90^\circ$$

である。 $PD = 12$, $PF = 20$, $DF = 12$ より, 三角形 PDF について $PF^2 > PD^2 + DF^2$ が成り立つから

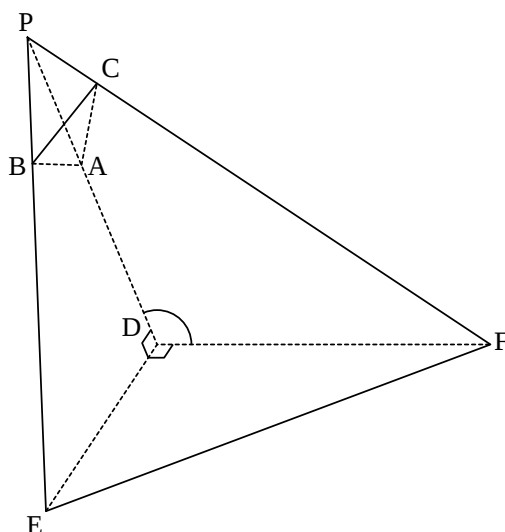
$$\angle PDF > 90^\circ$$

$$\therefore \angle ADF > 90^\circ$$

である。 $DE = 9$, $DF = 12$, $EF = 15$ より, 三角形 DEF について $EF^2 = DE^2 + DF^2$ が成り立つから

$$\angle EDF = 90^\circ$$

である。以上より, 点の位置関係を図示すると次図のようになる。



平面 ABED と平面 DEF の交線は直線 DE であり, $\angle ADE = 90^\circ$ より平面 ABED 上の直線 AD は直線 DE に垂直である。また, $\angle EDF = 90^\circ$ より平面 DEF 上の直線 DF は直線 DE に垂直である。よって, 平面 ABED と平面 DEF のなす角は $\angle ADF$ に等しい。 $\angle ADF > 90^\circ$ より, $\angle ADF$ は直角ではないから, 平面 ABED と平面 DEF は垂直ではない。したがって, 命題(a)は偽である。

次に, $\angle ADE = 90^\circ$, $\angle EDF = 90^\circ$ より, 直線 DE は平面 ACFD 上の互いに平行ではない 2 直線 AD, DF に垂直である。したがって, 直線 DE は平面 ACFD に垂直であり, 命題(b)は真である。

さらに、直線 AC は平面 $ACFD$ 上の直線であり、直線 DE は平面 $ACFD$ に垂直である。したがって、直線 AC と直線 DE は垂直であり、命題(c)は真である。

以上より、命題(a)，(b)，(c)の真偽の組合せとして正しいものは

④

……セ

である。

東進ハイスクール 東進衛星予備校

第4問

(1)

1回目または2回目に当たりが出る事象には

1回目に当たりが出る場合

1回目に当たりが出ず、かつ2回目に当たりが出る場合

の2通りがあり、これらは互いに排反である。よって、1回目または2回目に当たりが出る確率は

$$\frac{3}{16} + \frac{1}{8} = \frac{5}{16} \quad \text{……ア, イウ}$$

である。

1回目、2回目ともに当たりが出ない事象は、1回目または2回目に当たりが出る事象の余事象である。よって、1回目、2回目ともに当たりが出ない確率は

$$1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16} \quad \text{……エオ, カキ}$$

である。

また、1回も当たりが出ない事象は、1回目、2回目、3回目のいずれかで当たりが出る事象の余事象である。1回目、2回目、3回目のいずれかで当たりが出る事象には

1回目に当たりが出る場合

1回目に当たりが出ず、かつ2回目に当たりが出る場合

1回目、2回目ともに当たりが出ず、かつ3回目に当たりが出る場合

の3通りがあり、これらは互いに排反である。よって、1回目、2回目、3回目のいずれかで当たりが出る確率は

$$\frac{3}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$$

であり、1回も当たりが出ない確率は

$$1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8} \quad \text{……ク, ケ}$$

である。

(2)(i)

(1)より、問題文の表を埋めると次のようになる。

X	0	1200	計
確率	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$	1

よって、数量 X の期待値は

$$0 \cdot \frac{5}{8} + 1200 \cdot \frac{3}{8} = \underline{\underline{450}} \quad \text{……コサシ}$$

である。

(ii)

(i) で求めた X 円の期待値 450 円は参加料の金額 500 円

未満である (……①)。

……ス

したがって、主催者は参加料 500 円という設定について

妥当である (……①)

……セ

と判断する。

(3)(i)

(1) より、問題文の表を埋めると次のようになる。

Y	170	340	510	計
確率	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{11}{16}$	1

よって、数量 Y の期待値は

$$170 \cdot \frac{3}{16} + 340 \cdot \frac{1}{8} + 510 \cdot \frac{11}{16} = \underline{\underline{425}}$$

……ソタチ

である。

(ii)

(2) の (i) で求めた X 円の期待値 450 円は、 $a=170$ と設定した場合の支払い方法 2 で参加者が支払う参加料 Y 円の期待値 425 円

以上である (……①)。

……ツ

したがって、主催者は参加料 500 円という設定について

妥当ではない (……①)

……テ

と判断する。

また、数量 Y の期待値は a を用いて

$$a \cdot \frac{3}{16} + 2a \cdot \frac{1}{8} + 3a \cdot \frac{11}{16} = \frac{5}{2}a$$

と表されるから、主催者がくじ引き料の設定が妥当であると判断するのは

$$\frac{5}{2}a > 450$$

$$\Leftrightarrow a > \underline{\underline{180}}$$

……トナニ

のときである。