2026 年度大学入学共通テスト 解説〈数学Ⅱ・B・C〉

第１問

(1)

C_1 の方程式を整理すると，

$$x^2+y^2-7y+(2x-5y+25)=0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-6)^2=12$$

である。よって，C_1 の中心の座標は

$$(\underline{\underline{-1}},\ \underline{\underline{6}})$$
……アイ，ウ

であり，C_1 の半径 r_1 は

$$r_1=\underline{\underline{2}}\sqrt{\underline{\underline{3}}}$$
……エ，オ

とわかる。また，C_2 の方程式を整理すると，

$$x^2+y^2-7y-(2x-5y+25)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=27$$

である。よって，C_2 の中心の座標は $(1,1)$ であり，C_2 の半径 r_2 は

$$r_2=\underline{\underline{3}}\sqrt{\underline{\underline{3}}}$$
……カ，キ

とわかる。よって，C_1 の中心と C_2 の中心の間の距離は

$$d=\sqrt{\{1-(-1)\}^2+(1-6)^2}=\sqrt{\underline{\underline{29}}}$$
……クケ

とわかる。

(2)(i)

原点Oについて，$2x-5y+25$ に $x=0,\ y=0$ を代入すると，

$$2\cdot 0-5\cdot 0+25=25\geqq 0$$

より，

原点Oは D に含まれる(……⓪)　……コ

ことがわかる。C_1 の中心について，$2x-5y+25$ に $x=-1,\ y=6$ を代入すると，

$$2\cdot(-1)-5\cdot 6+25=-7<0$$

より，

C_1 の中心は E に含まれる(……①)　……サ

ことがわかる。C_2 の中心について，$2x-5y+25$ に $x=1,\ y=1$ を代入すると，

$$2\cdot 1-5\cdot 1+25=22\geqq 0$$

より，

　C_2 の中心は D に含まれる(……⓪)　　……シ

ことがわかる。

(ii)

実数 x, y が①と②の両方を満たすならば，①と②の左辺どうし，右辺どうしの差を考えることで

$$2(2x-5y+25)=0$$

となることから，④を満たす。よって，

　点 P を C_1 上にあり，かつ C_2 上にもある点とすると，P は ℓ 上にある(……②)　　……ス

ことがわかる。

(iii)

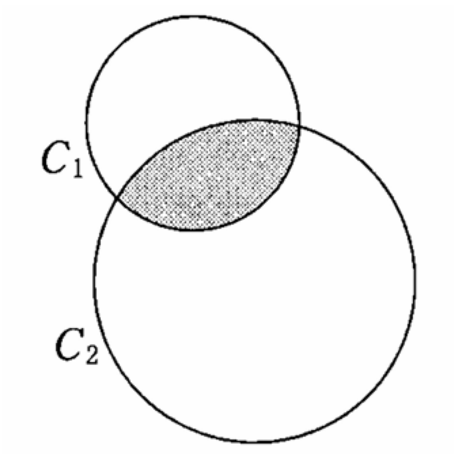
不等式③の表す領域は，

$$\begin{cases}(x+1)^2+(y-6)^2<12\\ 2x-5y+25\geqq 0\end{cases}$$

と

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2<27\\ 2x-5y+25<0\end{cases}$$

の和集合であるから，求める領域は以下のようになる。(……⓪)　　……セ



(iv)

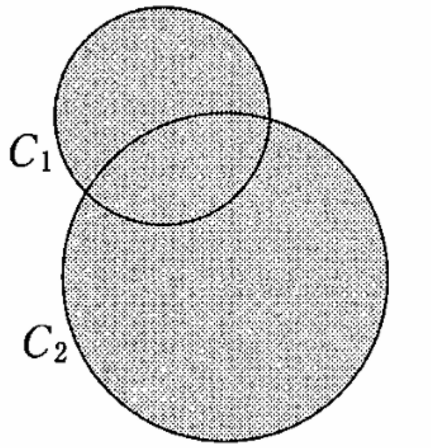
同様に不等式⑤の表す領域は，

$$\begin{cases}(x+1)^2+(y-6)^2<12\\ 2x-5y+25<0\end{cases}$$

と

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2<27\\ 2x-5y+25\geqq 0\end{cases}$$

の和集合であるから，求める領域は以下のようになる。(……④)　　……ソ



第２問

(1)

正弦の加法定理より，

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\ (\cdots\cdots①)$$ ……ア

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

である。また，これらを足し合わせることにより，

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$

となるので，$\alpha=\dfrac{A+B}{2}$ (……④)，$\beta=\dfrac{A-B}{2}$ (…⑤) とすると①が得られる。 ……イ，ウ

(2)

式①より，$A=x+\dfrac{5}{12}\pi,\ B=x+\dfrac{\pi}{12}$ とし，(1) を利用すると，

$$f(x)=2\sin\frac{\left(x+\frac{5}{12}\pi\right)+\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}{2}\cos\frac{\left(x+\frac{5}{12}\pi\right)-\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}{2}$$

$$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{6}\ (\cdots\cdots③,\ ②)$$ ……エ，オ

$$=2\cos\frac{\pi}{6}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

と変形できる。$2\cos\dfrac{\pi}{6}=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}>0$ および $\dfrac{\pi}{4}\leqq x+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{9}{4}\pi$ に注意すると，$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ が最大のとき，

すなわち

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}\ (\cdots\cdots③)$$ ……カ

のときに $f(x)$ は最大値 $2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1=\sqrt{3}$ (……⑥) をとる。 ……キ

(3)(i)

式①の $\sin\dfrac{A+B}{2}$，および $x+a,\ x+2a,\ x+3a$ が等差数列であることに着目すると，

$$\sin(x+a)+\sin(x+3a)=2\sin\frac{(x+a)+(x+3a)}{2}\cos\frac{(x+a)-(x+3a)}{2}$$

$$=2\cos a\cdot\sin(x+2a)\ (\because \cos(-a)=\cos a)$$

となるから，

$\sin(x+a)+\sin(x+3a)$ (……①) ……ク

は

$\sin(x+2a)$ (……①) ……ケ

の定数倍となる。よって，$g(x)$ は

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin(x+a)+\sin(x+2a)+\sin(x+3a) \\ &= 2\cos a\cdot\sin(x+2a)+\sin(x+2a) \\ &= (2\cos a+1)\sin(x+2a) \end{aligned}$$

(……④) ……コ

と変形できる。

(ii)

$a=\frac{5}{6}\pi$ のとき，(3)(i)より，$g(x)=\left(2\cos\frac{5}{6}\pi+1\right)\sin\left(x+\frac{5}{3}\pi\right)=(-\sqrt{3}+1)\sin\left(x+\frac{5}{3}\pi\right)$ となる。

$-\sqrt{3}+1<0$ および $\frac{5}{3}\pi \leqq x+\frac{5}{3}\pi<\frac{11}{3}\pi$ に注意すると，$\sin\left(x+\frac{5}{3}\pi\right)$ が最小のとき，すなわち

$$\sin\left(x+\frac{5}{3}\pi\right)=-1$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{5}{3}\pi=\frac{7}{2}\pi$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{11}{6}\pi$$

……サシ，ス

のときに $g(x)$ は最大値 $(-\sqrt{3}+1)\cdot(-1)=\sqrt{3}-1$ (……⑧) をとる。 ……セ

第３問

(1)(i)

$f'(x)=x^2-4x+3$ (……②)　　……ア

$\quad =(x-1)(x-3)$

であるから，$f(x)$ の増減は次表のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{4}{3}+k$	$\searrow$	k	$\nearrow$

よって，$f(x)$ は

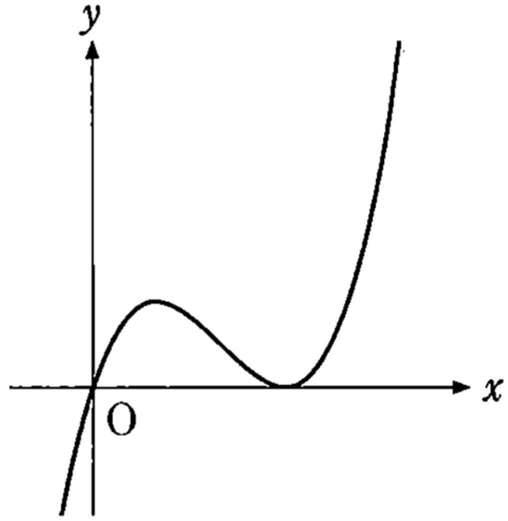
$x=1$ のとき，極大値 $\frac{4}{3}+k$ (……⑨)　　……イ，ウ

$x=3$ のとき，極小値 k (……⑤)　　……エ，オ

をとる。

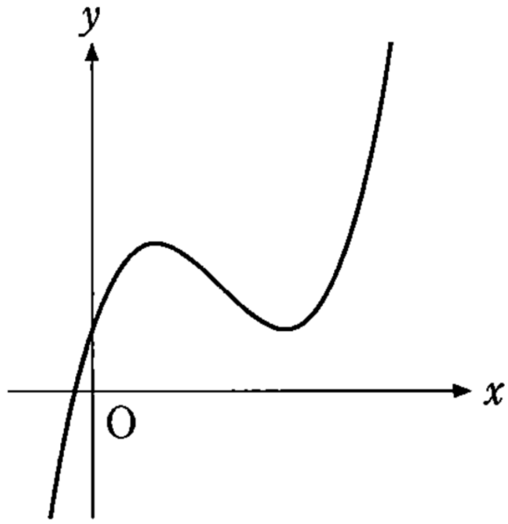
(ii)

増減表より，$k=0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフの概形は次図のようになる。



(……②)　　……カ

また，$k>0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフの概形は次図のようになる。



(……$\underline{\underline{0}}$)　　　　……キ

(iii)

$\alpha=1$ より，

$$f(0)<0<f(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow k<0<\frac{4}{3}+k$$

$$\therefore -\frac{4}{3}<k<0\ (\cdots\cdots\underline{\underline{8}},\ \underline{\underline{0}})$$ ……ク，ケ

である。また，$0\leqq x\leqq\beta$ では $f(x)\leqq 0$，$\beta\leqq x\leqq\alpha$ では $f(x)\geqq 0$ であるから，2つの部分の面積が等しいための条件は，

$$-\int_0^{\beta}f(x)\,dx=\int_{\beta}^{\alpha}f(x)\,dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\beta}f(x)\,dx+\int_{\beta}^{\alpha}f(x)\,dx=0$$

$$\therefore \int_0^{\alpha}f(x)\,dx=0\ (\cdots\cdots\underline{\underline{1}})$$ ……コ

である。このとき，

$$\int_0^{\alpha}f(x)\,dx=\int_0^1\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+k\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{12}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+kx\right]_0^1$$

$$=\frac{11}{12}+k$$

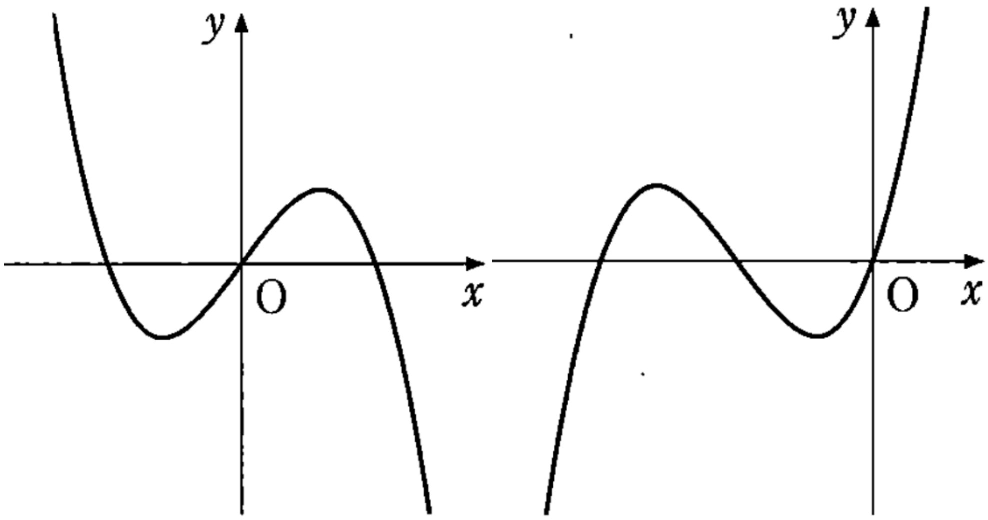
となるから，

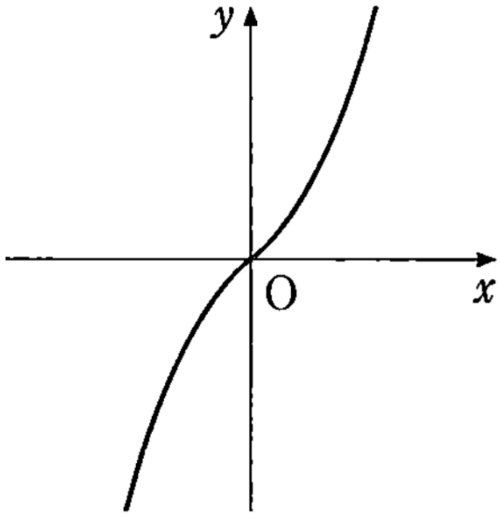
$$k=\underline{\underline{\frac{-11}{12}}}$$ ……サシス，セソ

である。

(2)

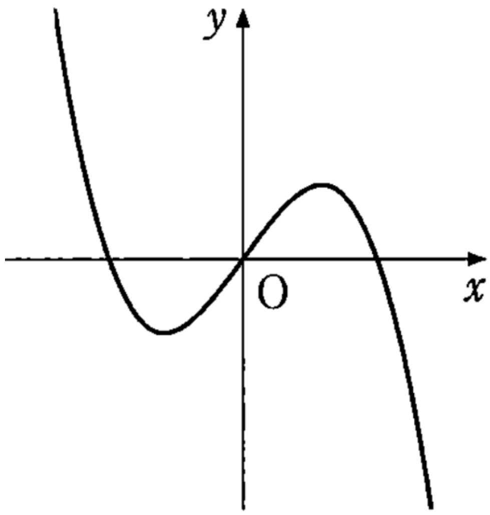
条件(a)について，$g(0)=0$ より関数 $y=g(x)$ のグラフは原点を通り，$g'(0)>0$ より関数 $y=g(x)$ のグラフの原点における接線の傾きが正である。よって，条件(a)を満たす関数 $y=g(x)$ のグラフの概形は次の3つのみである。

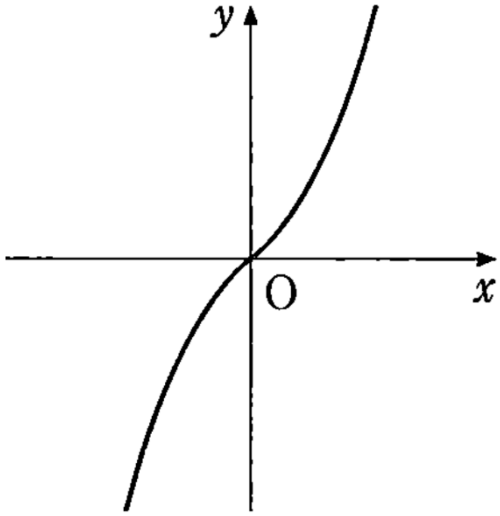




(……①，②，④)　　　　……タ，チ，ツ

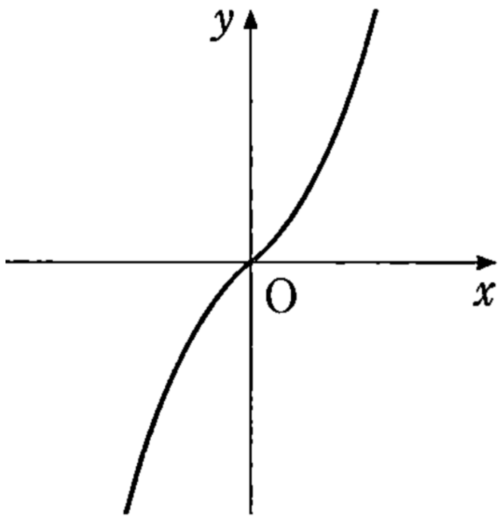
条件(b)は $g''(0)=0$ と同値であり，原点が関数 $y=g(x)$ のグラフの変曲点となる。よって，条件(a)，(b)をともに満たす関数 $y=g(x)$ のグラフの概形は次の2つのみである。





(……①, ④)　……テ，ト

条件(c)について，2次関数 $g'(x)$ に現れる2次の項の係数は正であるから，3次関数 $g(x)$ に現れる3次の項の係数も正である。よって，条件(a)，(b)，(c)を満たす関数 $y=g(x)$ のグラフの概形は次図のみである。



(……④)　……ナ

第４問

(1)(i)

$$b_1 = 4\cdot 1 - 1 = \underline{\underline{3}}$$ ……ア

であるから,

$$b_1 = a_2 - a_1$$
$$\Leftrightarrow 3 = a_2 - 1$$
$$\therefore a_2 = \underline{\underline{4}}$$ ……イ

となる。さらに,

$$b_2 = 4\cdot 2 - 1 = \underline{\underline{7}}$$ ……ウ

であるから,

$$b_2 = a_3 - a_2$$
$$\Leftrightarrow 7 = a_3 - 4$$
$$\therefore a_3 = \underline{\underline{11}}$$ ……エオ

となる。

(ii)

$n \geqq 2$ のとき,

$$b_1 = a_2 - a_1$$
$$b_2 = a_3 - a_2$$
$$\vdots$$
$$b_{n-1} = a_n - a_{n-1}$$

の辺々を足すと,

$$\sum_{k=1}^{n-1} b_k = a_n - a_1$$

$$\therefore a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \ (\cdots\cdots \underline{\underline{0}})$$ ……カ

が得られる。よって,

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(4k-1)$$
$$= 1 + 4\cdot\frac{1}{2}n(n-1) - (n-1)$$
$$= \underline{\underline{2}}n^2 - \underline{\underline{3}}n + \underline{\underline{2}}$$ ……キ，ク，ケ

である。

(2)

$$c_{n+1} - c_n = \{p(n+1)+q\}\cdot 2^{n+1} - (pn+q)\cdot 2^n$$
$$= \{2p(n+1) + 2q - (pn+q)\}\cdot 2^n$$

$=\{pn+(2p+q)\}\cdot 2^n$ (……⓪, ⑤) ……コ，サ

であるから，$d_n=(2n+1)\cdot 2^n$ と比較すると，

$$\begin{cases} p=2 \\ 2p+q=1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow p=2,\ q=-3$ ……シ，スセ

となる。以上より，$c_n=(2n-3)\cdot 2^n$ であるため，

$$\sum_{k=1}^{n} d_k=\sum_{k=1}^{n}(c_{k+1}-c_k)$$
$$=c_{n+1}-c_1$$
$$=\{2(n+1)-3\}\cdot 2^{n+1}-(2\cdot 1-3)\cdot 2^1$$

$=(2n-1)\cdot 2^{n+1}+2$ (……③) ……タ，ソ

である。

(3)

x, y, z を定数として，数列 $\{c_n\}$ を

$$c_n=(xn^2+yn+z)\cdot 2^n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

とする。このとき，

$$c_{n+1}-c_n=\{x(n+1)^2+y(n+1)+z\}\cdot 2^{n+1}-(xn^2+yn+z)\cdot 2^n$$
$$=\{2x(n+1)^2+2y(n+1)+2z-(xn^2+yn+z)\}\cdot 2^n$$
$$=\{xn^2+(4x+y)n+(2x+2y+z)\}\cdot 2^n$$

となるから，x, y, z を

$$\begin{cases} x=1 \\ 4x+y=-1 \\ 2x+2y+z=-1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x=1,\ y=-5,\ z=7$

と定めれば $d_n=c_{n+1}-c_n$ が成り立つ。以上より，$c_n=(n^2-5n+7)\cdot 2^n$ であるため，

$$\sum_{k=1}^{n} d_k=\sum_{k=1}^{n}(c_{k+1}-c_k)$$
$$=c_{n+1}-c_1$$
$$=\{(n+1)^2-5(n+1)+7\}\cdot 2^{n+1}-(1^2-5\cdot 1+7)\cdot 2^1$$

$=(n^2-3n+3)\cdot 2^{n+1}-6$ (……⑦) ……ツ，チ

である。

第５問

(1)

X は正規分布 $N\left(116, 25^2\right)$ に従うから，$Y=\dfrac{X-116}{25}$ (……①) とおくと，Y は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。　……ア

ここで,

$$X \geqq 120$$
$$\Leftrightarrow Y \geqq \frac{120-116}{25}=0.16$$

であるから，正規分布表より

$$\begin{aligned} P(X \geqq 120) &= P(Y \geqq 0.16) \\ &= \frac{1}{2}-0.0636 \\ &= 0.4364 \\ &\fallingdotseq 0.44 \ (\cdots\cdots⑤) \end{aligned}$$　……イ

である。

(2)(i)

$$\begin{aligned} E(W_i) &= 0\cdot(1-p)+1\cdot p \\ &= p \ (\cdots\cdots⓪) \end{aligned}$$　……ウ

$$\begin{aligned} V(W_i) &= \{0-E(W_i)\}^2(1-p)+\{1-E(W_i)\}^2 p \\ &= p^2(1-p)+(1-p)^2 p \\ &= p(1-p) \ (\cdots\cdots③) \end{aligned}$$　……エ

である。

(ii)

(i) より，n が十分に大きいとき，標本平均 $\overline{W}$ は近似的に正規分布 $N\left(p, \dfrac{p(1-p)}{n}\right)$ (……⑦) に従う。

……オ

ここで，$n=400$ として，帰無仮説「$p=0.4$」が正しいと仮定したとき，$\overline{W}$ は近似的に平均が 0.4，標準偏差が $\sqrt{\dfrac{0.4(1-0.4)}{400}}=\dfrac{\sqrt{6}}{100}$ (……②) の正規分布に従う。　……カ

したがって，$Z=\dfrac{\overline{W}-0.4}{\dfrac{\sqrt{6}}{100}}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。また，$\sqrt{6}=2.45$ とすると，

$$\overline{W} \geqq 0.46$$

$$\Leftrightarrow Z \geqq \frac{0.46-0.4}{\frac{\sqrt{6}}{100}}$$

$$= \sqrt{6}$$

$$= 2.45$$

であるから，正規分布表より

$$P\left(\overline{W} \geqq 0.46\right) = P\left(Z \geqq 2.45\right)$$

$$= \frac{1}{2} - 0.4929$$

$$= 0.0071 \ (\cdots\cdots ②) \qquad \cdots\cdots キ$$

$$= 0.71\%$$

$$< 5\%$$

となる。よって，$P\left(\overline{W} \geqq 0.46\right)$ は有意水準 5% より小さいから，帰無仮説は棄却される (……①)。

……ク

したがって，有意水準 5% で A 地域における今年の資格試験の合格率は 0.4 より高いと判断できる (……⓪)。 ……ケ

(3)

$n = 100$ として，帰無仮説「$p = 0.4$」が正しいと仮定したとき，$\overline{W}$ は近似的に平均が 0.4，標準偏差が $\sqrt{\frac{0.4(1-0.4)}{100}} = \frac{\sqrt{6}}{50}$ の正規分布に従う。したがって，$Z' = \frac{\overline{W}-0.4}{\frac{\sqrt{6}}{50}}$ とおくと，Z' は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。また，

$$\overline{W} \geqq 0.46$$

$$\Leftrightarrow Z' \geqq \frac{0.46-0.4}{\frac{\sqrt{6}}{50}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$= 1.225$$

であるから，正規分布表より

$$
\begin{aligned}
P\left(\overline{W} \geqq 0.46\right) &= P\left(Z' \geqq 1.225\right) \\
&\geqq P\left(Z' \geqq 1.23\right) \\
&= \frac{1}{2} - 0.3907 \\
&= 0.1093 \\
&= 10.93\% \\
&> 5\%
\end{aligned}
$$

となる。よって，$P\left(\overline{W} \geqq 0.46\right)$ は有意水準 5% より大きい (……①)。　……コ

したがって，有意水準 5% で帰無仮説は棄却されない (……①)。　……サ

第６問

(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\overrightarrow{\mathrm{MA}}+2\overrightarrow{\mathrm{MB}}-\overrightarrow{\mathrm{MC}}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}}=-\overrightarrow{\mathrm{AM}}+2\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right)-\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AP}}=2\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}}$$

である。よって，M が A と一致するとき，すなわち $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\vec{0}$ のとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=2\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

となり，P は E (……④) と一致する。　……ア

また，M が D と一致するとき，すなわち

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

のとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

となり，P は B (……①) と一致する。　……イ

(2)

②の左辺について，

$$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}}\ (\cdots\cdots②)$$ ……ウ

となる。また，②の右辺は，

$$a\overrightarrow{\mathrm{MA}}+b\overrightarrow{\mathrm{MB}}+c\overrightarrow{\mathrm{MC}}=-a\overrightarrow{\mathrm{AM}}+b\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right)+c\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right)$$

$$=b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}+(-a-b-c)\overrightarrow{\mathrm{AM}}\ (\cdots\cdots①,\ ②,\ ⑦)$$ ……エ，オ，カ

となる。したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=a\overrightarrow{\mathrm{MA}}+b\overrightarrow{\mathrm{MB}}+c\overrightarrow{\mathrm{MC}}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}}=b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}+(-a-b-c)\overrightarrow{\mathrm{AM}}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AP}}=b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}+(1-a-b-c)\overrightarrow{\mathrm{AM}}\ (\cdots\cdots①,\ ②,\ ⑨)$$ ……キ，ク，ケ

と変形できる。よって，M がどの位置にあっても，②を満たす P の位置が変わらないための必要十分条件は，

$$1-a-b-c=0$$

$$\Leftrightarrow a+b+c=1\ (\cdots\cdots⑦)$$ ……コ

である。

(3)(i)

(2) より，$a+b+c=1$ かつ $a=\dfrac{1}{2}$ のとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = b\overrightarrow{\mathrm{AB}} + c\overrightarrow{\mathrm{AC}} + (1-a-b-c)\overrightarrow{\mathrm{AM}}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AP}} = b\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \left(\frac{1}{2}-b\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} - b\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

と変形できる。ここで，b, c は $b+c=\frac{1}{2}$ を満たす実数であり，b はすべての実数をとりうる。よって，P が存在する範囲は，I を通り直線 BC に平行な直線である。すなわち，中点連結定理より，直線 IJ (……④) である。 ……サ

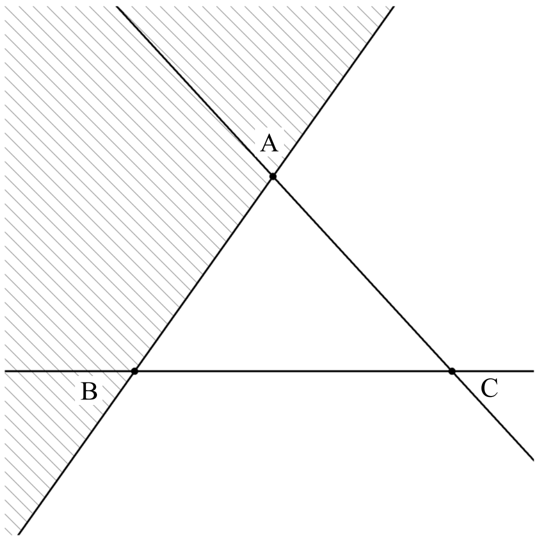
(ii)

(2) より，$a+b+c=1$ かつ $c<0$ のとき，

②

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{AP}} = b\overrightarrow{\mathrm{AB}} + c\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ c<0 \end{cases}$$

を満たす。ここで，a, b は $a+b>1$ を満たす実数であり，b はすべての実数をとりうる。よって，P が存在する範囲は，直線 AB を境界として C を含まない側の領域である。ただし，境界線を含まない。この領域を図示すると，下図のようになる。



(……③) ……シ

第７問

(1)

$z=\sqrt{3}+i$ のとき，

$$|z|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\underline{\underline{2}}$$ ……ア

であり，

$$\begin{aligned} w &= \left(\sqrt{3}+i\right)+\frac{1}{\sqrt{3}+i} \\ &= \left(\sqrt{3}+i\right)+\frac{\sqrt{3}-i}{\left(\sqrt{3}+i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)} \\ &= \left(\sqrt{3}+i\right)+\frac{\sqrt{3}-i}{4} \\ &= \frac{\underline{\underline{5\sqrt{3}}}}{\underline{\underline{4}}}+\frac{\underline{\underline{3}}}{\underline{\underline{4}}}i \end{aligned}$$ ……イ，ウ，エ，オ，カ

である。

(2)(i)

$z=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$ と表されているとき， $r>0$ より

$$\begin{aligned} w &= z+\frac{1}{z} \\ &= z+z^{-1} \\ &= r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)+\frac{1}{r}\left(\cos\theta-i\sin\theta\right) \\ &= \left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta+i\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta \ (\cdots\cdots \underline{\underline{⑥}}, \underline{\underline{⑨}}) \end{aligned}$$ ……キ，ク

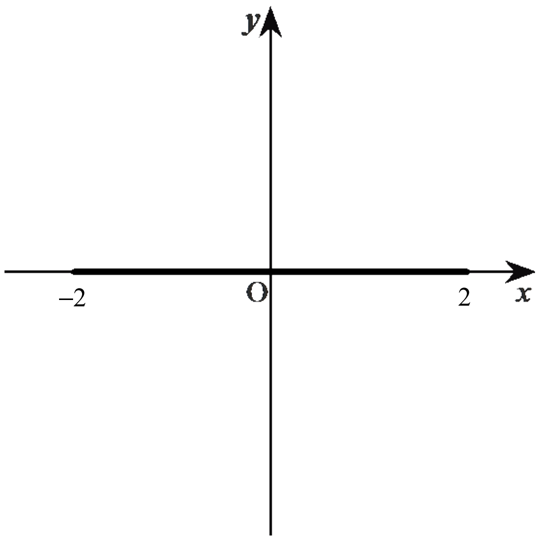
が成り立つ。θ の値によらず $\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta$ が 0 になるとき， $r-\dfrac{1}{r}=0$ が成り立つ。 $r>0$ より，

$$\begin{aligned} & r-\frac{1}{r}=0 \\ \Leftrightarrow\ & r^2=1 \\ \therefore\ & r=\underline{\underline{1}} \end{aligned}$$ ……ケ

となる。

(ii)

$r=1$ のとき， $w=2\cos\theta$ が成り立ち， w は実数である。 z が C 上を動くとき， $\cos\theta$ は -1 以上 1 以下のすべての値をとるため， w は点 -2 と点 2 を端点とする線分上を動き，その図は以下のとおりである。



$(\cdots\cdots①)$ ……コ

(iii)

$w=x+yi$ のとき，（i）より

$$x=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta$$

$$y=\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta$$

が成り立つ。$r\neq 1$ のとき $r-\dfrac{1}{r}\neq 0$ であり，$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ に代入すると，

$$\frac{x^2}{\left(r+\frac{1}{r}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}=1\ (\cdots\cdots②)$$ ……サ

が得られる。

(3)(i)

$w=z+\dfrac{1}{z}$ について，

$$w^2=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2$$

$$=z^2+2\cdot z\cdot\frac{1}{z}+\left(\frac{1}{z}\right)^2$$

$$=z^2+\frac{1}{z^2}+2\ (\cdots\cdots③)$$ ……シ

が成り立つ。

(ii)

z^2 は原点を中心として半径 r^2 の円周を動くため，(1)(iii)より，$z^2+\dfrac{1}{z^2}=X+Yi$ が動く図形の方程式は

$$\frac{X^2}{\left(r^2+\dfrac{1}{r^2}\right)^2}+\frac{Y^2}{\left(r^2-\dfrac{1}{r^2}\right)^2}=1\ (\cdots\cdots②) \qquad \cdots\cdots ス$$

となる。この方程式は，原点を中心とした楕円の方程式を表している。ここで，

$$\begin{aligned}\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)^2-\left(r^2-\frac{1}{r^2}\right)^2&=\left(r^4+\frac{1}{r^4}+2\right)-\left(r^4+\frac{1}{r^4}-2\right)\\&=4\\&>0\end{aligned}$$

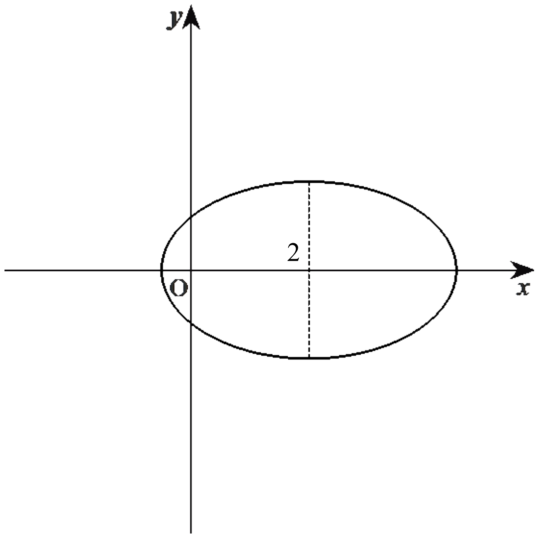
$$\therefore \left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)^2>\left(r^2-\frac{1}{r^2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow r^2+\frac{1}{r^2}>\left|r^2-\frac{1}{r^2}\right|\ (\because 0<r,\ r\neq 1)$$

より，この楕円は実軸方向が長軸である楕円である。そして，$w^2=z^2+\dfrac{1}{z^2}+2$ から，w^2 が動く図形は，点 2 を中心として長軸が実軸に平行な楕円である。さらに，w^2 が動く楕円と実軸の 2 つの交点を調べると，その点に対応する数は小さいものから順番に $-r^2-\dfrac{1}{r^2}+2,\ r^2+\dfrac{1}{r^2}+2$ となる。ここで，

$$-r^2-\frac{1}{r^2}+2=-\left(r-\frac{1}{r}\right)^2$$

と $r>0,\ r\neq 1$ から，不等式 $-r^2-\dfrac{1}{r^2}+2<0<r^2+\dfrac{1}{r^2}+2$ が常に成り立つため，この楕円は内部に原点を含む。以上より，w^2 が動く楕円の概形は以下のようになる。



(……③)　　……セ