解答.
まず $p=2$ で n,k が条件をみたす場合を考える．$n+3=2n^{k-1}$ なので, $k \geqq 3$ であると仮定すると, $n+3 \geqq 2n^2$ より $n \leqq \dfrac{3}{2}$ となり矛盾．よって $k=2$ で, このとき $n=3$ で, 条件をみたす.

$p \geqq 3$ と仮定する.

$$(n-1)_{n-2}\mathrm{C}_{p-2} = (n^{k-1}-2)p(p-1)$$

より, $p(p-1) \equiv 0 \pmod{n-1}$ がわかる．よって $p(p-1)=(n-1)l$ (l は正の整数) とおける．$n \geqq p$ より $l \leqq p$ だから, p が素数であることを用いて, $l=p$ または, $n-1$ が p の倍数となる．$l=p$ と仮定すると, $n=p$ より $1+2p=p^k$ となるから, $\mathrm{mod}\,p$ を考えて矛盾を得る．よって $n=mp+1$ (m は正の整数) とおける．このとき $p(p-1)=mpl$ より $m \leqq p-1$ がわかるが,

$$\begin{aligned}
{}_{n-2}\mathrm{C}_{p-2} = {}_{mp-1}\mathrm{C}_{p-2} &= \frac{(mp-1)(mp-2)\cdots(mp-(p-2))}{(p-2)!} \\
&\equiv \frac{(-1)(-2)\cdots(-(p-2))}{(p-2)!} = (-1)^{p-2} = -1 \pmod{p}
\end{aligned}$$

より $-m \equiv m_{n-2}\mathrm{C}_{p-2} = ((mp+1)^{k-1}-2)(p-1) \equiv 1 \pmod{p}$ なので, $m=p-1$ がわかる．よって $n=p^2-p+1$ である．さらに, $1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{p-1} \equiv 1+2+\cdots+(p-1) \equiv 0 \pmod{p}$ を用いると,

$$\begin{aligned}
{}_{p^2-p-1}\mathrm{C}_{p-2} &= \frac{(p^2-p-1)(p^2-p-2)\cdots(p^2-p-(p-2))}{(p-2)!} \\
&\equiv \frac{-(p+1)(p+2)\cdots(p+(p-2))}{(p-2)!} \\
&\equiv -\frac{(p-2)!+p(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p-2})(p-2)!}{(p-2)!} \\
&= -1-p\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p-2}\right) \\
&\equiv -1-p \pmod{p^2}
\end{aligned}$$

がわかるので, 二項定理を用いて

$$-1-p \equiv {}_{p^2-p-1}\mathrm{C}_{p-2} = (p^2-p+1)^{k-1}-2 \equiv (k-1)(p^2-p)-1 \pmod{p^2}$$

がわかる．よって $k \equiv 2 \pmod{p}$ である．$k \geqq p+2$ と仮定すると,

$$\begin{aligned}
(p^2-p+1)^p > {}_{p^2-p+1}\mathrm{C}_p &= (p^2-p+1)^k - 2(p^2-p+1) \\
&\geqq (p^2-p+1)^{p+2} - 2(p^2-p+1)
\end{aligned}$$

より,

$$1 \geqq (p^2-p+1)^2 - 2(p^2-p+1)^{-(p-1)} \geqq 7^2 - 2\cdot 7^{-2}$$

で矛盾．よって $k=2$ がわかる．$p \geqq 5$ と仮定すると，$p^2-p-i > p-i$ $(i=2,3,\ldots,p-2)$ より，

$$
\begin{aligned}
p^2-p-1 &< \frac{(p^2-p-1)(p^2-p-2)\cdots(p^2-p-(p-2))}{(p-2)!} \\
&= {}_{p^2-p-1}\mathrm{C}_{p-2} = p^2-p-1
\end{aligned}
$$

で矛盾．よって $p=3$, $n=7$ で，このとき条件をみたす．

以上より，解は $(n,k,p)=(3,2,2),(7,2,3)$ である．