解答.

直交座標を適当に定める．回転, 平行移動および変換 $(x,y)\mapsto(x,ty)$ $(t>0)$ により, C_1, C_2 の方程式が

$$C_1:(x+a)(y+b)=c$$
$$C_2:(x-a)(y-b)=d$$

(a,b,c,d は実数) であるとしてよい．C_1, C_2 は共通接線を 4 本もつので $(a,b)\neq(0,0)$ である．C_1, C_2 の接線は x 軸, y 軸に平行ではないので, m_1 の方程式を $y=mx+n$ (m,n は実数で $m\neq 0$) とおける．m_1 は C_1 に接するので, x の 2 次方程式 $(x+a)(mx+n+b)=c$ は重解をもつから,

$$(am+n+b)^2-4m\big\{a(b+n)-c\big\}=0$$

を得る．同様に m_1 が C_2 に接することから

$$(am-n+b)^2-4m\big\{a(b-n)-d\big\}=0$$

を得る．これらを辺々引いて, $4(am+b)n-8amn+4m(c-d)=0$ がわかるので,

$$-an+b\frac{n}{m}+c-d=0$$

である．S_1, T_1 の x 座標はそれぞれ $-\dfrac{am+n+b}{2m}$, $\dfrac{am-n+b}{2m}$ なので, N_1 の x 座標は $-\dfrac{n}{2m}$ である．よって N_1 の座標は $(-\dfrac{n}{2m},\dfrac{n}{2})$ なので, N_1 は直線

$$2bx+2ay-c+d=0$$

上にある．同様にして N_2, N_3, N_4 もこの直線上にあることがわかるので, N_1, N_2, N_3, N_4 は同一直線上にある．

(なお, N_i たちが通る直線は, 双曲線 C_1, C_2 の 2 つの交点を通る直線に一致する．この事実は,

> 平面上に 2 点で交わる 2 つの円 ω_1, ω_2 があるとする．ω_1, ω_2 の共通外接線と ω_1, ω_2 の接点をそれぞれ S, T とし, ST の中点を M とする．このとき M は ω_1, ω_2 の 2 つの交点を通る直線上にある．

というよく知られた事実の双曲線バージョンとなっている)