志望校合格を目指す生徒とそのご父母のための大学進学情報紙

TOSHIN TIMES

学力増進号 vol.3 ～2015～

数学「空間図形」編

# 空間図形問題の解き方

今回の学力増進号では「空間図形」をテーマに、今までと少し違ったアプローチをします。シンプルな問題に対して、いろいろな解法を考えることで、空間図形全般に適用できるような「解き方」を学びます。キーワードは<3つのテクニック>と<4つのツール>。"新しい"空間図形問題の解き方、ぜひ体感してください。

## 3つのテクニックと4つのツールを使いこなす。

空間図形の問題を解くときは、「3つのテクニック、4つのツール」を考えましょう。

**<3つのテクニック>**
① 補助線を引く
② 断面を取り出す
③ 視点を変える

×

**<4つのツール>**
(a) 初等幾何(中学数学、数学A)
(b) 三角比(数学I)
(c) 図形と方程式(数学II)
(d) ベクトル(数学B)

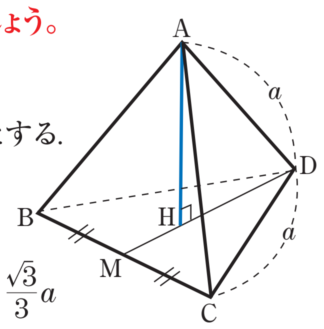
計算や処理が簡単になるかどうかは、その問題に合った<テクニック>と、教科書や高等学校対応数学で学んだ<ツール>をどれだけ的確に組み合わせるかにかかっています。

では、正四面体のシンプルな問題を題材に、幾つかの解答例を通して、「3つのテクニック、4つのツール」を確認していきましょう。
数学II・B範囲を学習していない人も、本質的な数学力に繋がりますので、果敢に立ち向かってください。

**【問題1】**
1辺の長さが $a$ である正四面体 ABCD の体積 $V$ を求めよ.
(できる限り多くの解法で)

思いつきやすい補助線を引いて考えてみましょう。

**(解答1)<重心の性質の利用> ①(a)**




A から平面 BCD に下ろした垂線の足を点 H とする.
このとき, H は△BCD(正三角形)の重心である.
よって, 辺 BC の中点を M とすると,

H は DM を2:1に内分するから $\mathrm{DH}=\frac{2}{3}\mathrm{DM}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$

三平方の定理により $\mathrm{AH}=\sqrt{\mathrm{AD}^2-\mathrm{DH}^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$

正四面体の体積 $V$ は $V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{BCD}\cdot\mathrm{AH}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}a\cdot a\cdot\sin 60^\circ\right)\times\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

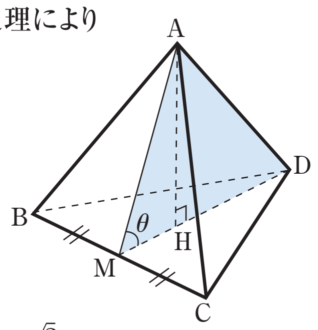
三角比の利用を試みてみましょう。

**(解答2)<断面を取り出す> ②(b)**

$\mathrm{AM}=\mathrm{DM}=a\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}a$, △AMD で余弦定理により

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{AM}^2+\mathrm{DM}^2-\mathrm{AD}^2}{2\mathrm{AM}\cdot\mathrm{DM}}=\frac{1}{3}$$

よって $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$



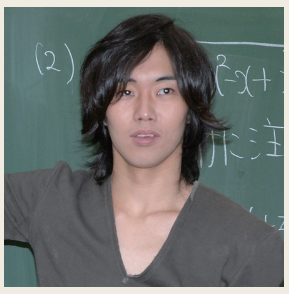

頂点 A から線分 DM に垂線 AH を下ろすと

$$\mathrm{AH}=\mathrm{AM}\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$$

また, △BCD の面積 $S$ は $S=\frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{BD}\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

正四面体 ABCD の体積 $V$ は $V=\frac{1}{3}S\cdot\mathrm{AH}=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

**東進数学科講師・松田(まつだ) 聡平(そうへい)先生**



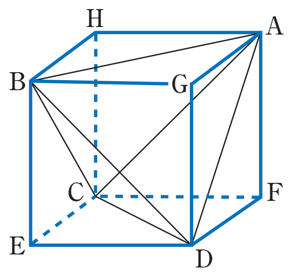
従来の堅苦しい数学とは一線を画すその授業は、幅広い学年の上位生から強い支持を受ける。徹底的に本質を追求した明快なアプローチは、いとも簡単に東大をはじめとした最難関大レベルの壁を打ち崩す。『松田の数学I・A/II・B典型問題Type100』(東進ブックス)は入試数学の"コア"をまとめた必携の書。「ワカル」を「デキル」に変える新しい数学は、君の思考力を刺激し、数学のイメージを覆す!

「正四面体は立方体に埋め込むことができる」という性質を使います。

**(解答3)<正四面体に埋め込む> ③(a)**

1辺 $a$ の正四面体 ABCD は,

1辺 $\frac{a}{\sqrt{2}}$ の立方体に埋め込むことができる.




このとき, 四面体 BCED, ACDF, CABH, DAGB は立方体の体積の $\frac{1}{6}$ なので,

正四面体 ABCD の体積は, 立方体の体積の $\frac{1}{3}$

正四面体の体積 $V$ は $V=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

(解答2)の途中から、「見方」を変えてみて工夫をしてみましょう。

**(解答4)<「底面」を設定する> ③(b)**

$\mathrm{AM}=\mathrm{DM}=a\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}a$, △AMD で余弦定理により

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{AM}^2+\mathrm{DM}^2-\mathrm{AD}^2}{2\mathrm{AM}\cdot\mathrm{DM}}=\frac{1}{3}$$

よって $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

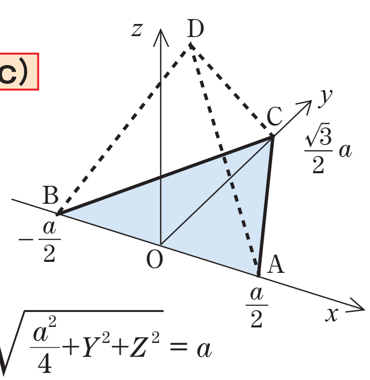
△AMD の面積 $S$ は $S=\frac{1}{2}\mathrm{MD}\cdot\mathrm{MA}\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}a^2$

△AMD を底面と見たとき, 高さを BC と考えられるので,

$$V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{AMD}\cdot\mathrm{BC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}a^2\cdot a=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

座標を積極的に利用してみましょう。

**(解答5)<空間座標を設定する> ③(c)**




$\mathrm{A}\left(\frac{a}{2},0,0\right)$, $\mathrm{B}\left(-\frac{a}{2},0,0\right)$,

$\mathrm{C}\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}a,0\right)$, $\mathrm{D}(0,Y,Z)$ $(Z>0)$ とする.

正四面体の1辺の長さが $a$ なので

$$\mathrm{AD}=\sqrt{\left(0-\frac{a}{2}\right)^2+(Y-0)^2+(Z-0)^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+Y^2+Z^2}=a$$

$$\mathrm{CD}=\sqrt{\left(Y-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+(Z-0)^2}=\sqrt{Y^2-\sqrt{3}\,aY+\frac{3}{4}a^2+Z^2}=a$$

よって $Y=\frac{\sqrt{3}}{6}a$, $Z=\frac{\sqrt{6}}{3}a$

また, △ABC の面積 $S$ は $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

正四面体 ABCD の体積 $V$ は $V=\frac{1}{3}S\cdot Z=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

裏面へ続く!⇨

少々ムリヤリに、ベクトルを設定してみましょう。

**（解答6）<ベクトルを利用する> ③(d)**

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とおく. $|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=a$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{d}\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}a^2$

$$\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{BCD}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2-(\vec{b}\cdot\vec{c})^2}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

A から面 BCD に下ろした垂線の足を H とすると,

H は平面 BCD 上なので, $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=s\vec{b}+t\vec{c}+u\vec{d}$ $(s+t+u=1)$ と表される.

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ であるから $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$, $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=0$

$$(s\vec{b}+t\vec{c}+u\vec{d})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=\left(-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}t\right)a^2=0$$

$$(s\vec{b}+t\vec{c}+u\vec{d})\cdot(\vec{d}-\vec{b})=\left(-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}u\right)a^2=0$$

$-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}t=0$, $-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}u=0$, $s+t+u=1$ より, $s=t=u=\frac{1}{3}$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2=\left|\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{d}\right|^2=\frac{2}{3}a^2 \quad \text{よって, } \mathrm{AH}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$$

正四面体の体積 $V$ は $V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{BCD}\cdot\mathrm{AH}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

このように、正四面体の体積を求めるだけの問題でも、<テクニック>と<ツール>によって、解法がいくつも現れます。各解法をまとめておきましょう。

**（解答1）**標準的。ただし、重心の性質はきちんと確認しておくこと！
**（解答2）**三角比を積極的に用いたもの。図形と計量の練習としては重要！
**（解答3）**一番カンタン！ただし、知っておかないと使えない。
**（解答4）**（**解答2**）の計算を少しラクにしたもの。
**（解答5）**メンドウ！ただし、空間座標（座標設定）の練習としては重要！
**（解答6）**メンドウ！ただし、ベクトル（共面条件）の練習としては重要！

それでは次の問題を、適切な<テクニック>と<ツール>を用いて、解いてみましょう！

**【問題2】**
1辺の長さが $a$ である正四面体 ABCD について, 次の問に答えよ.
(1) 外接球の半径 $R$ を求めよ.
(2) 内接球の半径 $r$ を求めよ.

**（解答）**

【問題1】（解答3）で用いた性質を使います。

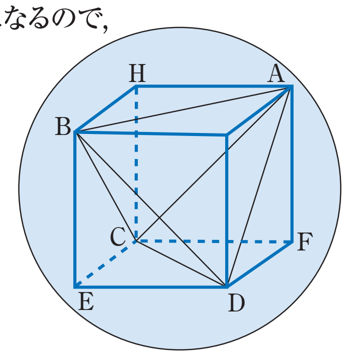
(1) ③(a)

正四面体 ABCD の外接球は, この正四面体を埋め込む1辺 $\frac{a}{\sqrt{2}}$ の立方体の外接球と一致する.

外接球の直径はこの立方体の対角線 AE になるので,

$$\mathrm{AE}=\sqrt{3}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}a$$

よって $R=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}a=\frac{\sqrt{6}}{4}a$




重心の性質と正四面体の対称性を使います。

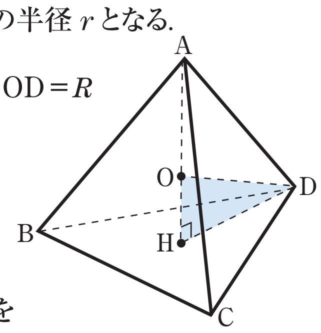
(2) ③(a)

正四面体の図形の対称性より, 内心と外心は一致する.
内心(外心)を O とすると, 右図の OH が内接球の半径 $r$ となる.

また, H は△BCD の重心なので, $\mathrm{DH}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a$, $\mathrm{OD}=R$

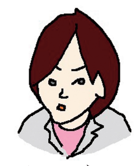
△OHD で三平方の定理より,

$$r=\sqrt{R^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{12}a$$




このように、適切な<テクニック>と<ツール>を用いれば、問題も理解しやすく計算も最小限に済み、ミスも減ります。

ただし、カンタンな解法だけを丸暗記するようなことはやめてください。与えられた問題に対して、つねに解法はいくつも考え、それぞれのメリット／デメリットまで考えるようにしましょう。「カンタン、ラク、ワカリヤスイものだけが良い！」という考えは非常に危険です。



最後に、東京大学の実際の入試問題（制限時間10分）を解いてみましょう。ここまでで学んだことを最大限に生かして考えることで、要領よく解くことができます。では、解説授業で会いましょう！

**【問題3】**
半径 $R$ の球面上に4点 A, B, C, D がある. 四面体 ABCD の各辺の長さは, $\mathrm{AB}=\sqrt{3}$, $\mathrm{AC}=\mathrm{AD}=\mathrm{BC}=\mathrm{BD}=\mathrm{CD}=2$ を満たしている. このとき $R$ の値を求めよ.

('01 東京大 理文共通)





TOSHIN TIMES
発行 東進本部
発行人 永瀬昭幸
本部 〒180-0003 東京都武蔵野市吉祥寺南町1-29-2
編集 株式会社ナガセ広報部
TEL:0422-44-9001








C M Y K