

センター試験に必ず出題される 必要条件・十分条件!

今回は、命題、必要条件・十分条件について紙面講義を行います。最後に扱うチャレンジ問題は、数論で有名なメルセンヌ数($2^n - 1$)を題材にした問題です。歴史的に素数を追求しようとしたさまざまな規則が、現在の入試問題にも影響を与えているのです。素数に関する問題は、センター試験だけでなく二次試験にも出題されています。素数に関する問題に慣れている人も、そうでない人も……ぜひ挑戦してみよう!!

東進数学科講師・河合 正人先生による 紙上講義!

考え方を理解し、 君の得意分野に!



命題の真・偽って何?

ある文章または式が必ず成立する(正しい)か否か(誤り)が判断できるとき、その文章または式を命題とよびます。書き方として、「 p ならば q である」が真のとき、

$$p \longrightarrow q, \quad p \implies q, \quad p \overset{\circ}{\longrightarrow} q$$

などと表し、偽のときは

$$p \overset{\times}{\longrightarrow} q$$

などと表します。

命題の真・偽を調べる際のキーワードは“必ず”と“一方通行”です。まず、これを覚えてください。数学の授業の際によく使われる同値変形($p \iff q$ または $p \leftrightarrow q$)とは違います。

“ p が成立すれば、(必ず) q は成立する(一方通行)と断言できるか?”と聞いているのです。もちろん、正しい(真)なら $p \longrightarrow q$ は真の命題となりますし、たった一例でもそれに背く(満たされない)もの(反対)があれば、 $p \longrightarrow q$ は偽の命題となります。

必要条件・十分条件って何?

現在、18歳人口は減少のなかにありますが、大学入試センター試験の受験人口はまだまだ高い水準を保っています。とりわけ数学I・Aに関しては、毎年35万人以上の生徒が受験します。

その大学入試センター試験の数学I・A(第1[2])に毎年出題されているのが、この必要条件・十分条件の選択問題です。配点は100点満点中、約10点分と考えてください。

では、出題される形式を見てみましょう。

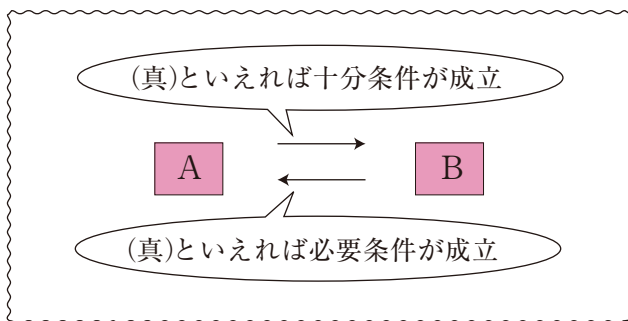
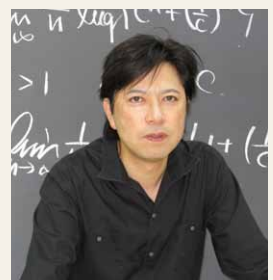
〔(文字)条件〕, A であることは, B であるための $\boxed{\text{ア}}$ 。
↑
(4択問題)

- ④ 必要十分条件である
- ① 必要条件であるが、十分条件ではない
- ② 十分条件であるが、必要条件ではない
- ③ 必要条件でも十分条件でもない

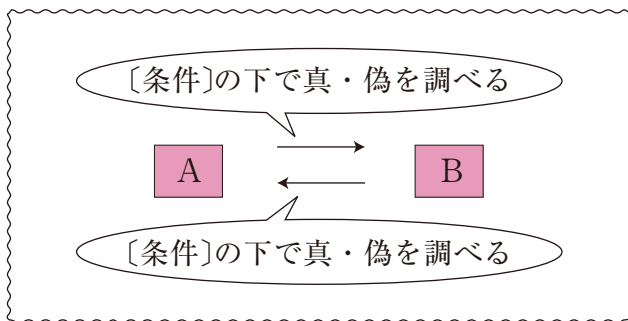
と出題されます。(4~5問の出題ケースが多い)

東進数学科講師・河合 正人先生

延べ20万人以上の生徒を指導し、数多くの締切講座を記録する予備校界を代表する講師。本物のプロ意識で指導し、第一志望校に合格した受験生は多数。作問者の考えにまで及ぶ「流れを大切に」授業では、心底から数学の面白さを体感することだろう。『センター試験過去問演習』(東進ブックス)では、研究し尽くされたデータ分析が絶大な人気を獲得し、高校教材としても採用される。



と考えるのがポイントです!……ですが、ここに落とし穴があるのです。 $A \longrightarrow B$ の真・偽、 $A \longleftarrow B$ の真・偽を調べる際はあくまで〔(文字)条件〕が大前提になることを忘れてはいけません。



上記の図のようなイメージで調べてください。

ちょっと余談ですが、①必要十分条件である、①必要条件であるが、十分条件ではない、②十分条件であるが、必要条件ではないの3つが解になる問題は、センター試験においてそれぞれほぼ同じ割合(頻度)で出題されています。

実際の問題について

(例題)

n を自然数とする。 n が8の倍数であることは、 n^2 が32の倍数であるための $\boxed{\quad}$ 。

- ④ 必要十分条件である
- ① 必要条件であるが、十分条件ではない
- ② 十分条件であるが、必要条件ではない
- ③ 必要条件でも十分条件でもない

上記の問題を考えてみましょう。

裏面へ続く!

まずは式に置き換えてみます。

$$(A) n=8k (k:\text{自然数}) \xrightleftharpoons[(イ)]{(ア)} (B) n^2=32l (l:\text{自然数})$$

まず(ア)について

$n=8k$ のとき、辺々を2乗して

$$n^2=64k^2=32 \times 2k^2=32l (l=2k^2 \text{とおく})$$

と導けます。つまり、(A) \rightarrow (B)が(真)といえることから十分条件は成立。

次に(イ)について

$n^2=32l$ の辺々で平方根をとり、 n を導いてみます。

実はここが最大のポイントです。条件文にある“ n を自然数とする”が大前提であることを忘れないでください。

$$n = \sqrt{32l} \quad (n \text{は自然数だから}\sqrt{\text{の前はプラスです)})$$

$$\begin{aligned} &= 4\sqrt{2l} \leftarrow \text{※最大のポイント!! } n \text{は自然数だから} \\ &= 8l \end{aligned}$$

$\sqrt{2l}$ などの形はあり得ないと考えてください。 $\sqrt{2l}$ の1も2を因数にもち、自然数 l' を用いて $l=2l'^2$ と表せます。 \leftarrow ($\sqrt{\text{がはずれることが第一}}$)
つまり、 $\sqrt{2l} = \sqrt{2 \times 2l'^2} = 2l'$

これにより、(A) \leftarrow (B)が(真)といえることから必要条件は成立。以上をまとめて、

$$(A) \xrightleftharpoons{\circ} (B)$$

となり、①の必要十分条件であるを選択します。

(イ)の考え方を知らなかった人は多いのではないのでしょうか……?

対偶って何?

前述の通り、命題 $A \rightarrow B$ の真・偽を調べることを学びましたが、さまざまな命題の中には「真……?それとも偽……?」と判断しづらいものがあります。大括りで“否定的な言い回し”のものに見られるケースです。もともと数学は、等式による式の変形が土台にありますから「〇〇でない」「〇〇と表せない」「素数である(その数を1とその数自身以外では割り切れない)などには対応がしづらいのです。そこで、対偶という奥の手を使います。

$A \rightarrow B$ に対して $\bar{A} \leftarrow \bar{B}$ (\bar{A}, \bar{B} はそれぞれ A, B の否定)を対偶とよびます。ポイントはその真・偽が一致することです。

$$A \xrightarrow{\circ} B \quad (\bar{A} \xleftarrow{\circ} \bar{B})$$

$$A \xrightarrow{\times} B \quad (\bar{A} \xleftarrow{\times} \bar{B})$$

そのため、命題 $A \rightarrow B$ の真・偽の判断がしづらいときに、その対偶にあたる $\bar{A} \leftarrow \bar{B}$ の真・偽を調べるケースがあるのです。今回チャレンジ問題として、この対偶を使うと判断しやすい問題を用意しました。

(チャレンジ問題)

n を2以上の自然数とする。 n が4で割り切れないことは、 2^n-1 が素数であるための 。

- ① 必要十分条件である
- ② 必要条件であるが、十分条件ではない
- ③ 十分条件であるが、必要条件ではない
- ④ 必要条件でも十分条件でもない

解答上のヒント

$$n \neq 4k (k:\text{自然数}) \xrightleftharpoons[(イ)]{(ア)} 2^n-1 = (\text{素数})$$

(ア)は $n=6$ のとき

$$2^6-1=64-1=63=3 \times 21$$

(イ)がやっかいですが、まずは

$$n \neq 4k \xleftarrow{(イ)} 2^n-1 = (\text{素数})$$

の対偶をとってみてください。つまり、

$$n = 4k \longrightarrow 2^n-1 = (\text{素数でない})$$

の真・偽を調べることです。

この続きはWEBで…… (考える楽しみこそ数学、頑張れ!)

正解はWEBで

WEB限定・河合先生の特別解説授業を確認しよう!

解答と詳しい解説の映像を、東進ドットコムで限定公開中!



東進ドットコムでしか見られない解説授業の映像を公開中!

ハッキリ言って合格実績が自慢です!! 大学受験なら、

TOSHIN TIMES
発行 東進本部
発行人 永瀬昭幸
本部 〒180-0003 東京都武蔵野市 吉祥寺南町1-29-2
編集 株式会社ナガセ広報部
TEL:0422-44-9001
禁・無断転載

東進ハイスクール
0120-104-555

東進衛星予備校
0120-104-531

東進 検索 0120-104-531
東進公式 Twitter 東進公式 Facebook

172大学の過去問も閲覧可!!
東進ドットコムはケータイ・スマートフォンからもアクセスできます!