志望校合格を目指す生徒とそのご父母のための大学進学情報紙

TOSHIN TIMES

学力増進号 vol.3 ～2016～

数学「2次方程式」編

2次方程式の様々な解法をマスターせよ！

２次方程式を解く方法をいくつ知っていますか？ 様々な解法を知ることで方程式を見る目が変わるでしょう。

東進数学科講師・原田 知也先生による紙上講義！

『2次方程式の解の配置問題』というものを解いたことがある人は多いと思います。
次のような問題です。

【問題】
x の2次方程式 $x^2-2ax+a-1=0$ が異なる2つの正の実数解を持つための実数 a の条件を求めよ。

これはどのように解いたでしょうか。おそらく，放物線のグラフを利用して解く方法を学んだことがあるはずです。

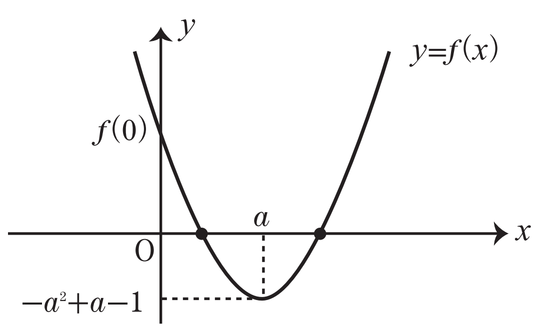
【解１】 視覚的に解く！

$$f(x)=x^2-2ax+a-1$$
$$=(x-a)^2-a^2+a-1$$

とおく。$y=f(x)$ と $y=0$（x 軸）が $x>0$ の範囲に異なる2つの共有点を持つ条件を考えて，

$$\begin{cases} a>0 \\ -a^2+a-1<0 \\ f(0)>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ a\text{は任意} \\ a>1 \end{cases}$$



これを解いて，

$a>1$ ……答

$a>0$ は軸の位置に関する条件，$-a^2+a-1<0$ は頂点の y 座標の符号に関する条件，$f(0)>0$ は $x=0$ のときの値（符号）に関する条件ですね。
$-a^2+a-1<0$ については，

$$-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}<0$$

となり，これは任意の実数 a で成立します。
この解法は次のような考察からきています。

> $x^2-2ax+a-1=0$ は，$y=x^2-2ax+a-1$ と $y=0$ から y を消去してできる x の方程式である。つまり，その実数解 x は，放物線と x 軸の交点の x 座標になっている。

解の配置問題では最も一般的な解法なので，この解法は必ずマスターしておく必要があります。では，それ以外にどのような解法があるのでしょうか。いろいろと見てみましょう。

【解２】 視覚的に解く！（技巧的に）

$x^2-2ax+a-1=0$ ……①

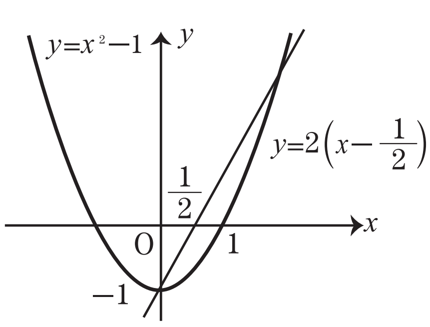
① $\Leftrightarrow x^2-1=2a\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$

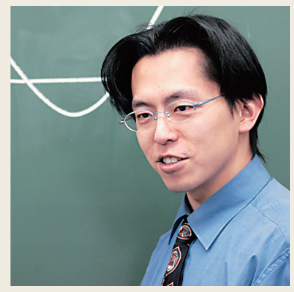
のように変形してみる。
このとき①の実数解は，

$y=x^2-1$ …………………②

$y=2a\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ ………③

の交点の x 座標として考えられる。
③は点 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ を通る傾き $2a$ の直線であり，



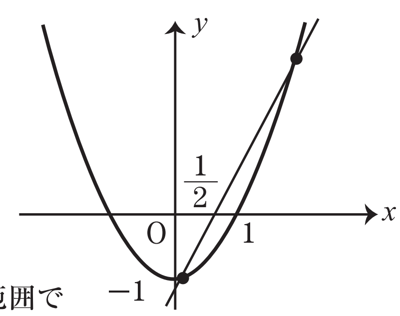


東進数学科講師・原田（はらだ） 知也（ともや）先生

一つの問題を解きながらほかの問題への繋がりや関連を広げることで、数学のおもしろさや全体像に迫る。入試において合否を分ける方針の立て方や時間配分についても、"易から難へ"を常に意識した授業で、解くスピードと得点力を徐々に育成。明快な授業に爽やかな人柄が、生徒の熱い支持を得ている。

これらのグラフが $x>0$ の範囲で異なる2点で交わるための条件を考えれば良い。
③が点$(0,-1)$を通るとき，（左下図）より，

$$-1=2a\left(0-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow a=1$$



なので，$a>1$ のとき②と③は $x>0$ の範囲で異なる2点で交わる。（右上図） 以上より，

$a>1$ ……答

【解１】はグラフを利用する解法ですが，【解２】は別視点でグラフを利用する解法です。 次に，2次方程式の解と係数の関係を利用して代数的に解く方法を見てみましょう。

【解３】 代数的に解く！

①の判別式を D とすると，

$$D/4=(-a)^2-(a-1)=a^2-a+1$$

である。よって，①が異なる2つの実数解を持つための条件は，

$$a^2-a+1>0$$

を満たすことであるが，これは，

$$\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

となり任意の実数 a で成立する。つまり，①は必ず異なる2つの実数解を持つことが確認できた。
次に①の実数解を α，β とすると，条件から，

$\alpha>0$ かつ $\beta>0$

を満たす。これは，

$\alpha+\beta>0$ かつ $\alpha\beta>0$

と同値関係にあるから，解と係数の関係より，

$2a>0$ かつ $a-1>0$

となり，これを解いて

$a>1$ ………答

この解法は，実数 α，β について，

$\alpha>0$ かつ $\beta>0$ $\Leftrightarrow$ $\alpha+\beta>0$ かつ $\alpha\beta>0$

という同値関係を上手く利用した解法です。これは α，β が実数であるときの同値関係であり，実数ではない場合（虚数のとき）には使えないので注意しましょう。

いかがでしょうか。このように，2次方程式の解の配置問題はいろいろな解法で解くことができます。もちろん，問題の設定によっては解くのが難しくなる解法もありますので，問題に応じて適した解法が取れたら最高ですね。

裏面へ続く！

さて，ここでもう一つの解法を見てみます。それは，2次方程式の解の公式を利用して具体的に解を求めて，それを利用する解法です。最も原始的な解法でありながら，あまり考えることがなかったとは思いますが，一度その威力を先ほどの問題で見てみましょう。

【解４】 解の公式で解く！

まずは $x^2-2ax+a-1=0$ の解を求めてみます。
今回は，異なる2つの実数解が存在することは明らかとしていきます。2次方程式の解の公式を利用すると，

$$x=a\pm\sqrt{a^2-a+1}$$

このようになりますね。すると，問題は異なる2つの正の解を持つ条件を求めるわけですから，この2つの解のうちの小さいほう（大きくないほう）が正であればよいので，

$$a-\sqrt{a^2-a+1}>0$$

であれば良いですね。この不等式を解いてみましょう。

$$a>\sqrt{a^2-a+1}$$

ですが，右辺が0以上の値しかとれないから，これは $a<0$ では成立しません。よって $a\geqq 0$ で考えることになり，このとき両辺を2乗すると，

$$a^2>a^2-a+1$$

となります。よって，

$$a>1$$

これは $a\geqq 0$ を満たしていますので，$a>1$ が答えになります。

いかがでしょうか。このように，2次方程式の解の公式を利用して具体的に解を出して，それを利用して解くのも悪くないでしょう。問題の設定によっては，威力を発揮します。

それでは次の2次方程式に関する解の配置問題を解いてみましょう。

【チャレンジ問題】
x の2次方程式 $x^2-4ax+2a+1=0$ が，1より大きい実数解を少なくとも1つ持つための実数 a の条件を求めよ

まずはよくある『誤答』を見てみましょう。少なくとも…の表現があるので，否定から考える方法です。発想としてはよいのですが，間違えやすい解法です。誤答であることがわからない人が結構多いのでは…？？　探してみましょう！　視覚的な解法です。

【誤答】

$$x^2-4ax+2a+1=0 \quad \cdots\cdots①$$

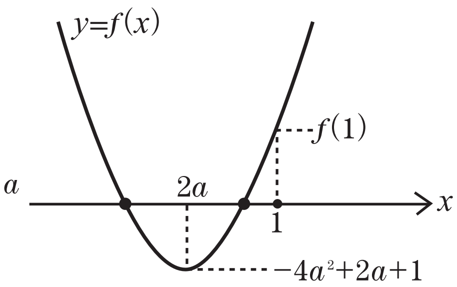
について，①の解が全て1以下であるための条件を考える。
すると，

$$f(x)=x^2-4ax+2a+1$$
$$=(x-2a)^2-4a^2+2a+1$$

とおいて，$y=f(x)$と$y=0$（x軸）が $x\leqq 1$ の範囲にのみ共有点を持つ条件を考えて，

$$\begin{cases} 2a\leqq 1 \\ -4a^2+2a+1\leqq 0 \\ f(1)\geqq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\leqq \dfrac{1}{2} \\ a\leqq \dfrac{1-\sqrt{5}}{4},\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\leqq a \\ a\leqq 1 \end{cases}$$



これを解いて，

$$a\leqq\frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

求める条件はこれの否定であり，

$$\frac{1-\sqrt{5}}{4}<a \quad \cdots\cdots誤答$$

さて，いかがでしょうか。おや？　間違いが見つからない!!　という人は次の関係が正しいのかどうかを再度検証してみてください。

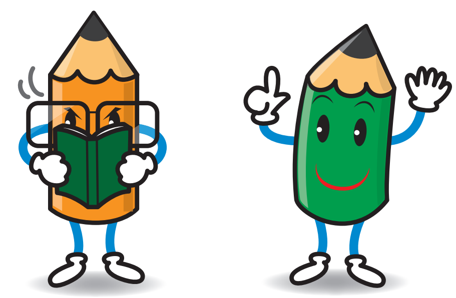
『与えられた2次方程式が，1より大きな解を持つ』

これを否定すると，

『与えられた2次方程式が1以下の解のみを持つ』

これは正しいですか？　Webで続きを確認してみましょう。

解説の続きは，*Web*で…*to be continued.*



TOSHIN TIMES
発行 東進本部
発行人 永瀬昭幸
本部 〒180-0003 東京都武蔵野市吉祥寺南町1-29-2
編集 株式会社ナガセ広報部
TEL:0422-44-9001