志望校合格を目指す生徒とそのご父母のための大学進学情報紙

TOSHIN TIMES

学力増進号 vol.12 ～2014～
数学「微分法・積分法」編

面積で差がつく「6分の…公式」をマスターせよ！

「6分の…公式」はその成立過程を理解してこそ公式が活きてくる!!
今回は「数学Ⅱ」の微分・積分の単元から面積を求める「6分の…公式」と呼ばれる公式とその活用法を紹介しましょう。
ではさっそく例題を見ていきましょう。

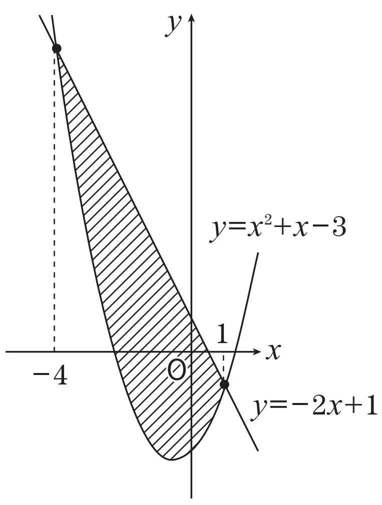
東進数学講師・堀西 彰先生による紙上講義！

【例題1】
(1) 放物線 $y=x^2+x-3$ と直線 $y=-2x+1$ によって囲まれる部分の面積を求めよ。
(2) 放物線 $y=x^2+4x-3$ と直線 $y=x+1$ によって囲まれる部分の面積を求めよ。

2題とも何の変哲もない教科書レベルの問題です。

解答

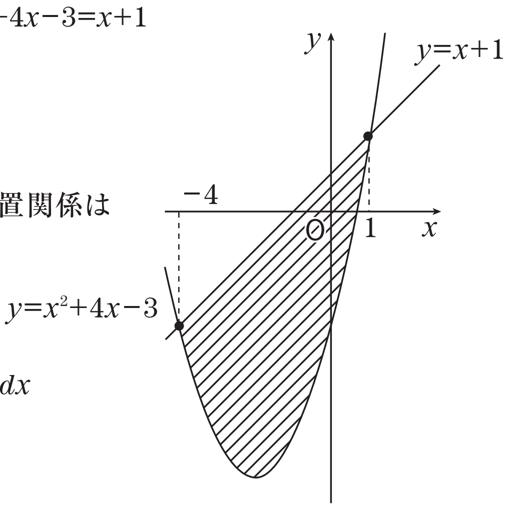
(1) $y=x^2+x-3$ と $y=-2x+1$ の交点の x 座標を求めます。
両式からyを消去して，$x^2+x-3=-2x+1$
これより，$x^2+3x-4=0$
$(x+4)(x-1)=0$
よって，$x=-4,1$
ここに，放物線と直線の位置関係は右の図のようになるので，
求める面積は，



$$\int_{-4}^{1}\{(-2x+1)-(x^2+x-3)\}dx$$
$$=\underline{\int_{-4}^{1}(-x^2-3x+4)dx}$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+4x\right]_{-4}^{1}$$
$$=\left(-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+4\right)-\left(\frac{64}{3}-24-16\right)=\frac{125}{6}\ \cdots\cdots(\text{答})$$

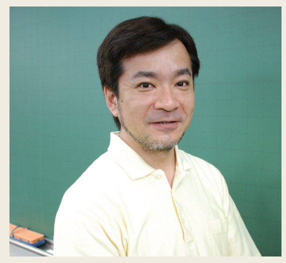
積分計算がややメンドウですが，特に難しいところはありませんね。

(2) $y=x^2+4x-3$ と $y=x+1$ の交点の x 座標を求めます。
両式からyを消去して，$x^2+4x-3=x+1$
これより，$x^2+3x-4=0$
$(x+4)(x-1)=0$
よって，$x=-4,1$
ここに，放物線と直線の位置関係は右の図のようになるので，
求める面積は，



$$\int_{-4}^{1}\{(x+1)-(x^2+4x-3)\}dx$$
$$=\underline{\int_{-4}^{1}(-x^2-3x+4)dx}$$

…おや？ この下線部は (1) の下線部とまったく同じです。ということは，この先は改めて計算する必要はなく，求める面積は，$\frac{125}{6}$ ……(答)



東進数学講師・堀西(ほりにし) 彰(あきら)先生

「数学は暗記科目ではない。原理原則を理解することによって問題の本質を見抜き、手筋のよい解答を得ることができる」。懇切丁寧な授業は、そんな先生の信条を具現化したもの。数学が苦手な君も得意な君も、先生の授業で数学の究極のスタイルを体験できるはずだ。

このように，見かけはまったく異なる部分の面積が等しくなるのは，偶然でしょうか。

一般に，x座標がそれぞれ α，β（ただし，$\alpha<\beta$）である異なる2点で交わる放物線 $y=f(x)$と直線 $y=g(x)$が囲む部分の面積をSとすると，

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\bigstar)$$

で表すことが出来ます。$|f(x)-g(x)|$と絶対値をつけるのは，区間(α,β)においてどちらのグラフが上方にあるか分からないからです。
これは，$f(x)$や$g(x)$が相異なる組であっても，$|f(x)-g(x)|$さえ同じ式であれば，面積は等しくなるということです。

2式からyを消去した $f(x)=g(x)$，すなわち $f(x)-g(x)=0$ は，$x=\alpha$，β を2解にもつ2次方程式ですから，$f(x)$の2次の係数をaとすると，

$$f(x)-g(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

となります。
$a>0$のとき，区間(α,β)において$a(x-\alpha)(x-\beta)<0$ですから，(★)は，

$$S=-a\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

となりますが，これは下の図1の斜線部分の面積を表しています。これはまた，x軸方向に$-\alpha$だけ平行移動した図2の斜線部分の面積と等しいので，

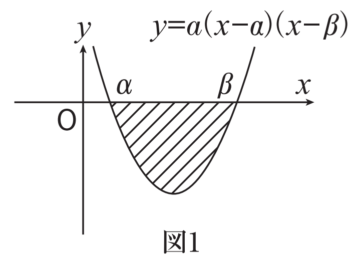


図1

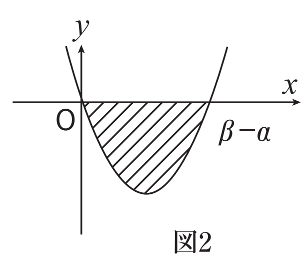


図2

$$S=-a\int_{0}^{\beta-\alpha}x\{x-(\beta-\alpha)\}dx=-a\int_{0}^{\beta-\alpha}\{x^2-(\beta-\alpha)x\}dx$$
$$=-a\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{\beta-\alpha}{2}x^2\right]_{0}^{\beta-\alpha}=-a\left\{\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3-\frac{\beta-\alpha}{2}(\beta-\alpha)^2\right\}$$
$$=\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$

これが，いわゆる「6分の…公式」です。
まとめます。

$$-a\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$
$$a\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$

裏面へ続く！

これを用いると,【例題1】は,(1),(2)ともに,交点の x 座標を求めたあと,求める面積は,

$$\int_{-4}^{1}(-x^2-3x+4)\,dx=-\int_{-4}^{1}(x+4)(x-1)\,dx$$
$$=\frac{1}{6}\{1-(-4)\}^3$$
$$=\frac{125}{6}$$

とすることができます。

ではもう1題。「6分の…公式」をフルに活かす例題です。

【例題2】

放物線 $y=-2x^2+ax+b$ と直線 $y=mx+n$ が2点P,Qで交わっている。Pの x 座標が-1,Qの x 座標が2であるとき,この放物線と直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

やたら文字定数が多い(a, b, m, n)設定ですが……。

解答

$f(x)=-2x^2+ax+b$, $g(x)=mx+n$ とおくと,

$f(x)=g(x)$ すなわち $f(x)-g(x)=0$ ……………………(★)

の解が $x=-1$, 2であることから,(★)の左辺は

$-2(x+1)(x-2)$

と因数分解されることが分かります。

(x^2の係数が-2であることに注意しましょう。)

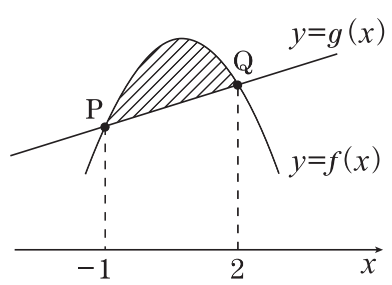
放物線は上に凸なので,グラフの概形は下のようになり,

求める面積は,

$$\int_{-1}^{2}\{f(x)-g(x)\}\,dx$$
$$=-2\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)\,dx$$

(ここで「6分の…公式」です!!)

$$=\frac{2}{6}\{2-(-1)\}^3$$
$$=\frac{1}{3}\times 27$$
$$=9$$



チャレンジ問題

これまでの解説をふまえて問題にチャレンジしてみよう!

問題

xy平面上に放物線 $C:y=-3x^2+3$ と2点A$(1,0)$, P$(0,3p)$がある。線分APとCは,Aとは異なる点Qを共有している。

(1) 定数pの存在する範囲を求めよ。

(2) S_1を,Cと線分AQで囲まれた領域とし,S_2を,C,線分QP,およびy軸とで囲まれた領域とする。S_1とS_2の面積の和が最小となるpの値を求めよ。

(2011年度・一橋大学)

解答

(1) 直線APの式は $y=-3px+3p$ であるから,これと $C:y=-3x^2+3$ を連立させて解き,交点の x 座標を求めると,

$-3px+3p=-3x^2+3$

これを整理して,

$x^2-px+p-1=0$

これより,

$(x-1)(x-p+1)=0$

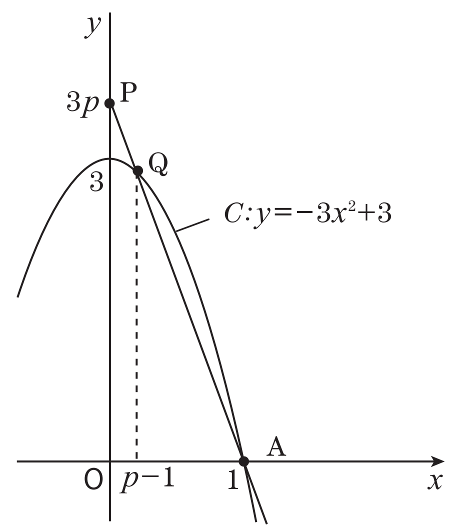
ゆえに,$x=1$, $p-1$

よって,Aとは異なる交点のx座標は$p-1$である。

ここに,線分APとCが,Aとは異なる点Qを共有する条件は,右図より,

$0\leqq p-1<1$

であるから,答えは,$1\leqq p<2$



堀|西|先|生|か|ら|のメッセージ

続きの(2)の解説は、東進ドットコムで行います! 上の図において題意の領域を把握したあとは,さあ面積計算ということになりますが,ただ闇雲に計算するだけでは時間とエネルギーの浪費となります。解説で示した「6分の…公式」をうまく使えるように面積の足し引きをうまく作りましょう。

TOSHIN TIMES

発行 東進本部

発行人 永瀬昭幸

本部 〒180-0003 東京都武蔵野市吉祥寺南町1-29-2

編集 株式会社ナガセ広報部

TEL:0422-44-9001