志望校合格を目指す生徒とそのご父母のための大学進学情報紙

TOSHIN TIMES

学力増進号 vol.3 ～2017～

数学「幾何学」編

幾何学（=geometry）はgeo（土地の）―metry（測量法）と訳すことができます！

古代エジプトにおいて河川の氾らんから土地を守る術として、治水を中心とする測量が発達したといわれています。紀元前7世紀頃になると、生活と関係深い測量的な幾何はギリシアに伝わり、紀元前300年頃にユークリッドによりユークリッド幾何学原本がまとめられました。この幾何学原本は数学の聖書とよばれ、その後1200年間も教科書として扱われることとなります。

東進数学科講師・河合 正人先生による紙上講義！

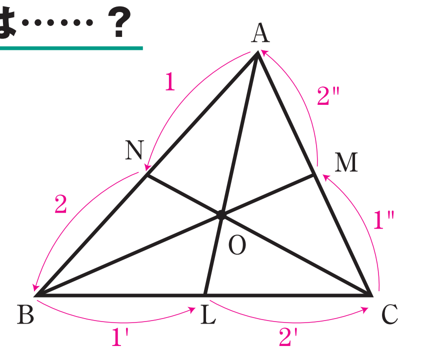
図形（幾何）問題に使われるチェバの定理・メネラウスの定理をマスターし正射影に触れてみよう！

東進数学科講師・河合 正人（かわい まさと）先生

延べ20万人以上の生徒を指導し、数多くの締切講座を記録する予備校界を代表する講師。本物のプロ意識で指導し、第一志望校に合格した受験生は多数。作問者の考えにまで及ぶ「流れを大切にする」授業では、心底から数学の面白さを体感することだろう。『センター試験過去問演習』（東進ブックス）では、研究し尽くされたデータ分析が絶大な人気を獲得し、高校教材としても採用される。

チェバ（Ceva）の定理とは……？

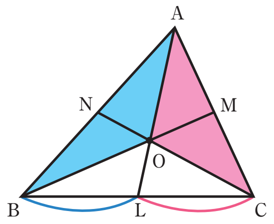
△ABCの辺BC、CA、AB上に各々点L、M、Nをとり AL、BM、CNが1点Oで交わるとすると、



$$\frac{AN}{NB}\times\frac{BL}{LC}\times\frac{CM}{MA}=1$$

（ワン→ツー→ワン→ツー→ワン→ツー）

が成立します。右図を使い説明してみましょう。線分の長さと面積の比を考えて、



$$\begin{aligned}BL:LC &= \triangle ABL:\triangle ACL\\ &= \triangle ABO:\triangle ACO \quad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

同様にして

$$CM:MA = \triangle BCO:\triangle BAO \quad \cdots\cdots ②$$

$$AN:NB = \triangle CAO:\triangle CBO \quad \cdots\cdots ③$$

①、②、③より

$$\frac{BL}{LC}=\frac{\triangle ABO}{\triangle ACO},\quad \frac{CM}{MA}=\frac{\triangle BCO}{\triangle BAO},\quad \frac{AN}{NB}=\frac{\triangle CAO}{\triangle CBO}$$

と変形し、辺々掛けてみてください。

$$\frac{BL}{LC}\times\frac{CM}{MA}\times\frac{AN}{NB}=\frac{\cancel{\triangle ABO}}{\cancel{\triangle ACO}}\times\frac{\cancel{\triangle BCO}}{\cancel{\triangle BAO}}\times\frac{\cancel{\triangle CAO}}{\cancel{\triangle CBO}}=1$$

$$\therefore\ \frac{AN}{NB}\times\frac{BL}{LC}\times\frac{CM}{MA}=1$$

（一筆書きで繋ぐことです）

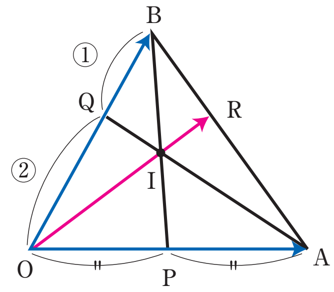
が成立します。

得な話

チェバの定理を数学Bのベクトルへ活用します（裏技）。

△OABで辺OAの中点をP、辺OBを2：1に内分する点をQとします。

ここでチェバの定理を使って、右図の$\overrightarrow{OR}$を求めてみましょう。



$$\frac{OP}{PA}\times\frac{AR}{RB}\times\frac{BQ}{QO}=1 \iff \frac{1}{1}\times\frac{AR}{RB}\times\frac{1}{2}=1$$

$$\therefore\ \frac{AR}{RB}=2 \quad (AR:RB=2:1\text{とわかります})$$

これより、$\overrightarrow{OR}=\dfrac{1\times\overrightarrow{OA}+2\times\overrightarrow{OB}}{2+1}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB})$

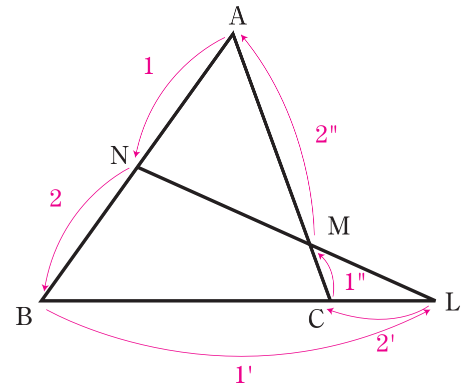
を簡単に求められます（実際には答えの検算チェックなどで使うことがほとんどです）。

メネラウス（Menelaus）の定理とは……？

△ABCに一つの直線が交わり、辺BC、CA、ABまたはその延長と各々点L、M、Nで交わるとすると、

$$\frac{AN}{NB}\times\frac{BL}{LC}\times\frac{CM}{MA}=1$$

（一筆書きで繋ぐことです）



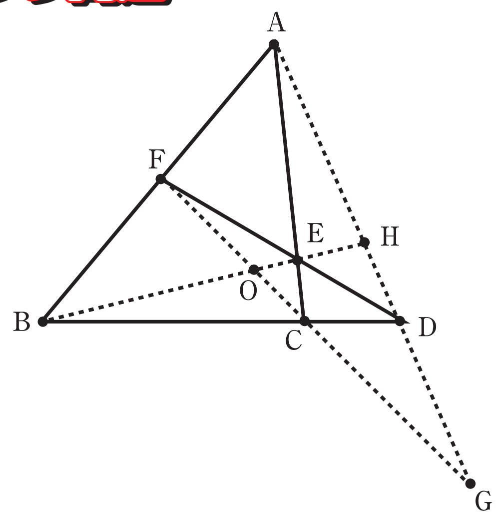
（ワン→ツー→ワン→ツー→ワン→ツー）

が成立し、これをメネラウスの定理とよびます（証明省く）。

裏面へ続く！

それではここで**チェバの定理**と**メネラウスの定理**を使った**チャレンジ問題**を準備しました。ぜひ、楽しみながらトライしてみてください!! 解答はWEBで……
(考える楽しみこそ数学、頑張れ!)

チャレンジ問題

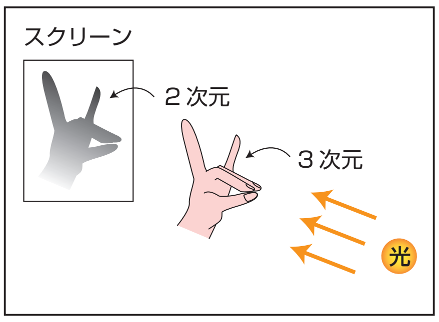


いずれの3直線も同一の点を通らない4直線が交わった図形を**完全四辺形**といいます。
上図の通りに各点を定めたとき、

DH : HA = DG : GA(調和点列)

となることを示せ。

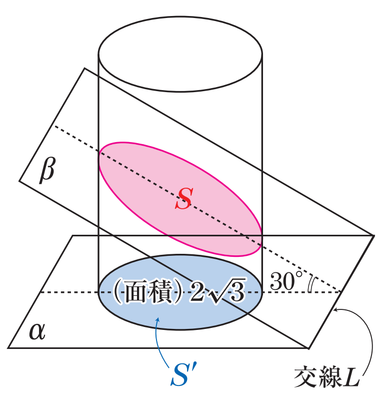
正射影に慣れてみよう



例えば右図のようにスクリーンに対して垂直な方向から平行な光(太陽光など)を当てたと考えてみます。手は3次元の物体ですが、影絵は2次元の平面(スクリーン)上に写し出されたものですね。この考え方を数学に応用してみると、3次元のものを2次元に置き換えたり、2次元のものを別の2次元で考えたり、2次元のものを1次元で考えたりすることができます。この正射影の概念は教科書には登場してこないのですが、使えると見通しよく解答できる問題も多いので、この機会にぜひ覚えておきましょう。

数学の問題としては次のような使い方があります!!

平面 α の上に楕円柱が垂直に置かれている右図の状態を考えて下さい。この楕円柱の垂直な切断面の面積を $S'=2\sqrt{3}$ とします。平面 α と角30°で交わるもう1つの平面を β とし、この平面 β と楕円柱の交わり(切断)によってできる図形の領域面積 S を考えてみます。

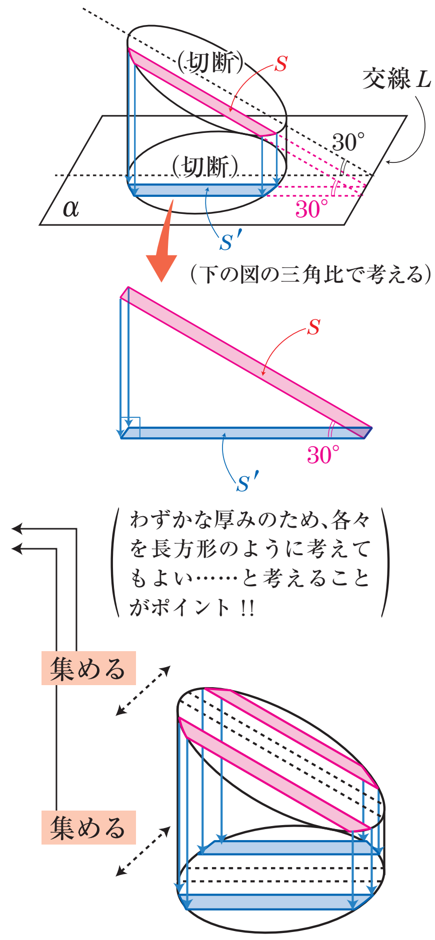


2平面 α、β をその交線 L に垂直に切ったイメージを考えて下さい。ただし、わずかに幅(厚み)を考えることを条件とします。(糸のように細いわずかな厚みです)
右図のようにそのわずかな面積を s、s' とすれば、

$$\cos 30^\circ = \frac{s'}{s}$$

となりますし、それはどの位置で考えても同じ比なのです。ならば、その短冊状の細い帯を集めても"比"($\cos 30^\circ$)は変わりません。

よって、$\cos 30^\circ = \dfrac{S'}{S}$ となります。



これこそ正射影の特徴です。
今回のケースでは $S'=2\sqrt{3}$ ですから S を求めるとき……

$$\cos 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{S} \iff S = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

つまり、$S=4$ が導けます。

TOSHIN TIMES
発行 東進本部
発行人 永瀬昭幸
本部 〒180-0003 東京都武蔵野市吉祥寺南町1-29-2
編集 株式会社ナガセ広報部
TEL:0422-44-9001