

「三角関数」「指数・対数関数」における おきかえを攻略する!



「三角関数」「指数・対数関数」の分野では、変数をおきかえて、2次方程式、2次不等式、2次関数に帰着させる解法がしばしば見られる。

今回の学力増進号では、この「おきかえ」をテーマにして、特に受験生が苦手としている最大・最小問題、方程式の解の個数の問題を処理する方法を紹介する。

東進数学科講師・志田 晶先生による紙上講義!

「おきかえ」に強くなろう!!

三角関数、指数・対数関数の問題では、変数のおきかえを行って問題を解くことがしばしばあります。

おきかえをするときに注意すべきことは次の2点です。

●最大・最小問題

→範囲に注意する!!

●方程式の解の個数の問題

→新旧変数の対応関係に注意する!!

では、ひとつずつ確認していきましょう。

最大・最小問題

最大・最小問題では、おきかえた文字の範囲に注意します。これは関数の値域を調べることに対応します。

例 次の(1)～(4)において、 t のとりうる値の範囲を求めよ。

(1) $t = \sin x$ ($0 \leq x < 2\pi$)

(2) $t = 2^x$ (x は実数全体)

(3) $t = \log_3 x$ ($1 \leq x \leq 81$)

(4) $t = 2^x + 2^{-x}$ (x は実数全体)

$1 \leq x \leq 81$ より
 $\log_3 1 \leq \log_3 x \leq \log_3 81$
 $\therefore 0 \leq t \leq 4$

(解答)

(1)は $-1 \leq t \leq 1$, (2)は $t > 0$ です。(3)は $0 \leq t \leq 4$

(4)は相加平均と相乗平均の関係を利用します。すると、

$$t = 2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$$

(等号は $2^x = 2^{-x}$, すなわち $x = 0$ のとき)

なので、 $t \geq 2$ となります。

【問題1】

(1) 関数 $y = 2\sin x - \cos^2 x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) の最小値を求めよ。

(山形大)

(2) a を定数とすると、 x の関数 $f(x) = 4^x + 4^{-x} - a(2^x + 2^{-x}) + a^2$ の最小値を求めよ。

(青山学院大)

(解答)

(1) $t = \sin x$ とおくと、 $-1 \leq t \leq 1$ ←範囲を求める

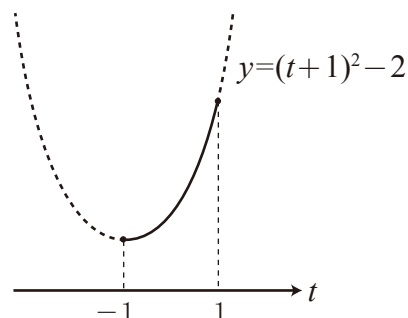
このとき、

$$y = 2\sin x - (1 - \sin^2 x)$$

$$= t^2 + 2t - 1$$

$$= (t+1)^2 - 2$$

よって、求める最小値は -2



東進数学科講師・志田 晶先生

東大、京大をはじめとする難関大合格へ受講者を導いた若き数学科トップ講師は、わかりやすさを徹底的に追求する。「数学的な考え方」を身につける授業で、今まで何気なく使っていた公式や解法の一つ一つが、意味を伴った強力な武器となる。センター～東大レベルまで買われる本格派の講義は絶大な人気を誇る。全国模試、テキストの作成チーフとして活躍した経歴を持ち、参考書も数多く執筆する実力派講師。



(2) $t = 2^x + 2^{-x}$ とおくと、 $t \geq 2$ ←例の(4)より範囲は $t \geq 2$

このとき、

$$4^x + 4^{-x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2$$

であるから、

$$y = (t^2 - 2) - at + a^2$$

$$= t^2 - at + a^2 - 2$$

$$= \left(t - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}a^2 - 2$$

〈方針〉

$t \geq 2$ において、2次関数

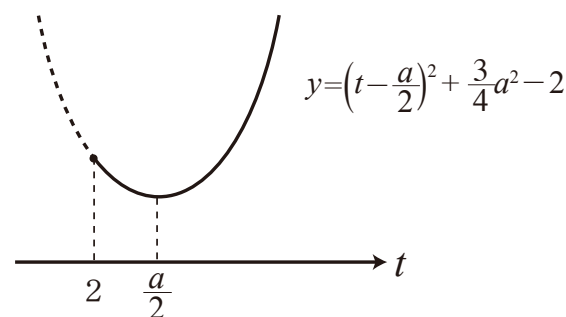
$$y = t^2 - at + a^2 - 2$$

の最小値を求めればよい。

よって、

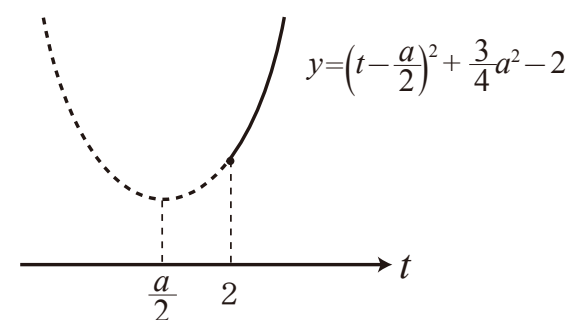
(i) $\frac{a}{2} \geq 2$ ($a \geq 4$) のとき

最小値は $\frac{3}{4}a^2 - 2$ ←頂点で最小



(ii) $\frac{a}{2} \leq 2$ ($a \leq 4$) のとき

最小値は $a^2 - 2a + 2$ ← $t = 2$ のとき最小



裏面へ続く! ➡

方程式の解の個数の問題

方程式では、おきかえたときに新旧変数の対応関係が問題になります。

【問題2】

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式を解け。

- (1) $4\sin^2\theta - 1 = 0$
- (2) $2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 = 0$
- (3) $\sin^2\theta - 6\sin\theta + 8 = 0$

(解答)

$t = \sin\theta$ とおく。

- (1) $4t^2 - 1 = 0$ となるので、 $t = \pm \frac{1}{2}$

代入すると、

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$$

(★)

$$\begin{cases} t = \frac{1}{2} \text{ のとき } \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi \\ t = -\frac{1}{2} \text{ のとき } \theta = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi \end{cases}$$

(★)

- (2) $2t^2 - 3t + 1 = 0$ となるので、 $t = 1, \frac{1}{2}$

代入すると、 $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi$

$$\begin{cases} t = 1 \text{ のとき } \theta = \frac{\pi}{2} \\ t = \frac{1}{2} \text{ のとき } \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi \end{cases}$$

(★)

- (3) $t^2 - 6t + 8 = 0$ となるので、 $t = 2, 4$

代入すると、対応する θ は存在しないのでこの方程式は解なし

$$\begin{cases} t = 2 \text{ のとき } \theta \text{ はなし} \\ t = 4 \text{ のとき } \theta \text{ はなし} \end{cases}$$

(1) ~ (3) はすべて t の2次方程式になり、その実数解 t は2個存在するのですが、 θ の個数はそれぞれ、4個、3個、0個です。

なぜこのようなことが起こるのかわかりますか。

それはおきかえを行うと、

どのような t なのかによって対応する θ の個数が違う!!

からです。実際、 t と θ の対応関係は、

$$\begin{cases} -1 < t < 1 \text{ のとき、} & \text{対応する } \theta \text{ は } 2 \text{ 個} \\ t = 1, -1 \text{ のとき、} & \text{対応する } \theta \text{ は } 1 \text{ 個} \\ t > 1, t < -1 \text{ のとき、} & \text{対応する } \theta \text{ は } 0 \text{ 個} \end{cases}$$

(★) を参照

となっているよね。ですから、 t の2次方程式が実数解を何個もつかということに加えて、どの範囲の解をもつかということも重要になります。このことを踏まえて次の問題を解いてみてください。

【チャレンジ問題】

方程式

$$a(\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta) + \sin\theta(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta) = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

が $0 \leq \theta \leq \pi$ において相異なる3つの実数解をもつときの a の値の範囲を求めよ。

(島根大)

(ヒント)

$t = \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$ とおくと、

$$t^2 = 3\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta$$

$$= 1 + 2\sin^2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta$$

$$\therefore \sin^2\theta + \sqrt{3}\sin\theta\cos\theta = \frac{t^2 - 1}{2}$$

これより、 $\textcircled{1}$ は

$$at + \frac{t^2 - 1}{2} = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

この問題の解説はweb上で行います。どしどしアクセスしてね。

それでは、web上で会おう!!



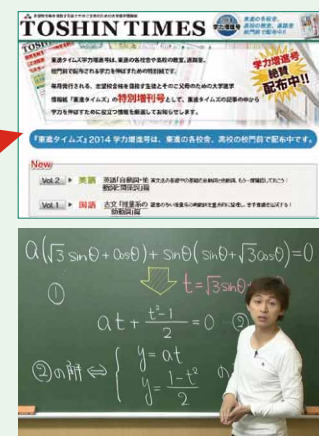
解答と詳しい解説の映像を、
東進ドットコムで限定公開中!

Web限定・志田先生の特別解説授業はこちら!

www.toshin.com

学力増進号

検索



東進ドットコムでしか見られない解説授業の映像を公開中!

TOSHIN TIMES
発行
東進本部
発行人
永瀬昭幸
本部
〒180-0003 東京都武蔵野市
吉祥寺南町1-29-2
編集
株式会社ナガセ広報部
TEL:0422-44-9001
禁・無断転載

東進ハイスクール

0120-104-555

東進衛星予備校

0120-104-531



東進

検索



東進公式
Twitter



東進公式
Facebook

172大学の過去問も閲覧可!!

東進ドットコムはケータイ・スマートフォンからもアクセスできます!

ハッキリ言って合格実績が自慢です!! 大学受験なら、