問題.

f を整数に対して定義され整数値をとる関数とする. $f(n) \neq m$ を満たすような任意の整数の組 (m, n) に対し

$$\frac{f\left(f(m)-n\right)}{m-f(n)}$$

が整数であるような関数 f をすべて求めよ.

解答.

$f(n)=0$ は条件を満たす．以下, $f(n)\neq 0$ を満たす整数 n が存在するとする．$f(n)\neq 0$, $|m|>3|f(n)|$ のとき, 問題の条件で n を $f(m)-n$ として, $m-f\left(f(m)-n\right)\neq 0$ ならば,

$$\frac{f(n)}{m-f\left(f(m)-n\right)}$$

は 0 でない整数である．よって $|m-f\left(f(m)-n\right)|\leq|f(n)|$ なので,

$f\left(f(m)-n\right)=m+l$, $|l|\leqq|f(n)|$ とかける．また問題の条件より

$$\frac{f\left(f(m)-n\right)}{m-f(n)}=1+\frac{f(n)+l}{m-f(n)}$$

は整数である．ここで, $f(n)+l\neq 0$ とすると,

$$|m|\leqq|m-f(n)|+|f(n)|\leqq|f(n)+l|+|f(n)|\leqq 3\,|f(n)|$$

となり矛盾．よって $f(n)+l=0$ である．以上より, $f(n)\neq 0$ かつ $|m|>3|f(n)|$ ならば

$$f\left(f(m)-n\right)=m-f(n)\qquad\cdots\cdots(*)$$

である．ゆえに, $|m|,|m'|>3|f(n)|$ のとき,

$$m\neq m'\text{ならば, }f\left(f(m)-n\right)\neq f\left(f(m')-n\right)\text{ より, }f(m)\neq f(m')$$

すなわち,

$$f(m)=f(m')\text{ ならば }m=m'$$

である．よって, ある M が存在して, $|x|,|y|>M$ のとき, $f(x)=f(y)$ ならば, $x=y$ が成り立つので, 各 $k>0$ に対し $|f(n)|\leqq k$ を満たす整数 n は高々有限個であり, 整数の列 $0<n_1<n_2<\cdots$ を, $|n|>n_k$ ならば $|f(n)|>k$ が成り立つようにとれる．また, (*) よりある N が存在して, $|n|>N$ ならば $f(m)=n$ をみたす整数 m が存在する．よって, $t>N$ とすれば, 整数 m,m' を $f(m)=t, f(m')=t+1$ ととれて, k を十分大きくとれば, $|n|>n_k$ のとき, $(*)$ より,

$$f\left(f(n+1)-m'\right)=f\left(f(n)-m\right)=n-t$$

であるから,

$$f(n+1)-m'=f(n)-m$$

が従う．よって, $a=m'-m$ とおけば, ある整数 b,c があって, $n>n_k$ のとき $f(n)=an+b, n<-n_k$ のとき $f(n)=an+c$ が成り立つ．n が十分大きいところで n が異なれば $f(n)$ も異なるので $a\neq 0$ である．よって, 問題の条件より, 各 m について, 十分大きな任意の n に対し,

$$\frac{a\left(f(m)-n\right)+c}{m-an-b}$$

が整数となる．$a \neq 0$ より，この値は $n \to \infty$ で 1 に収束するので，$f(m) = \dfrac{m-b-c}{a}$ がわかり，m が十分大きいときにはこれが $am+b$ に等しく，$-m$ が十分大きいときには $am+c$ に等しいから $a = \pm 1, b = c = 0$ がわかる．よって，$f(n) = n$ または $f(n) = -n$ がわかり，これらは条件をみたす．

以上より解は $f(n) = 0, f(n) = n, f(n) = -n$ である．