最終１月東大本番レベル模試　（2020 年 1 月 25 日実施）

採点基準　数学（文科・理科）

【共通事項】

１．約分の未了，根号内の整理不備は１点減点

２．分母の有理化の不備については減点なし

３．別解の配点は解答の配点に準ずる

【文科】(80 点満点)

第 1 問（20 点満点）

(1)（配点 8 点）

- 頂点を(x, y), (X, Y)などとおき，この座標をθで表して 4 点
- 上記のθを消去し，軌跡および定義域を求めて 4 点

(2)（配点 12 点）

- 放物線$y=f(x)$と曲線Cの交点を求め，ともに$-2<x<2$を満たすことを述べて 3 点
- $S(\theta)$をθで表して 5 点
- 途中の計算と答えに 4 点

第 2 問（20 点満点）

- 直線lの傾きを求める立式，および傾きに 6 点(各 3 点)
- 直線mの傾きを求める立式，および傾きに 6 点(各 3 点)
- $\tan\theta$を求めて 6 点
- 答えに 2 点

第 3 問（20 点満点）

(1)（配点 8 点）

- 1 回の試行での黒石の個数の遷移とそれぞれの確率を求めて 4 点
- 題意を満たす事象が 10 通りであることを述べて 2 点
- 答えに 2 点

(2)（配点 8 点）

- 3 回の試行で黒石が 2 個，0 個，1 個となる確率を求めて 6 点(各 2 点)
- 答えに 2 点

(3)（配点 4 点）

- 考え方と答えに 4 点

第 4 問（20 点満点）

(1)（配点 4 点）

- 正しく因数分解できて 4 点

(2)（配点 16 点）

- $2p^2$ の約数を考える方針に 2 点
- $2x+y-1 \geqq 1,\ x+2y-2 \geqq 2$ を述べて 2 点
- $2x+y-1,\ x+3y-2$ の組合せを考え，それぞれの解について述べて 10 点
- 答えに 2 点

【理科】（120 点満点）

第 1 問（20 点満点）

(1)（配点 10 点）

- $f(x)$ の正しい微分と三角関数の部分の合成に 4 点
- グラフなどから極大，極小を与える x の存在を説明して 2 点
- $f(x)$ の $0<x\leqq 2\pi$ における増減表あるいは増減の説明に 2 点
- 周期関数であることから理由を正しく述べられて 2 点

(2)（配点 10 点）

- 極大値を与える x の値の表示に 2 点
- $n\to\infty$ のとき，極大値を与える x が $\dfrac{3\pi}{4}$ に限りなく近づくことをグラフから示して 2 点
- 途中の計算と答えに 6 点

第 2 問（20 点満点）

(1)（配点 10 点）

- $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の連立漸化式を立式して 2 点
- 数学的帰納法で示す方針と，$n=k$ での成立を仮定し，$7a_k$, $7b_k$ をそれぞれ a_{k+1} , b_{k+1} で表して 3 点
- 背理法で a_{k+1} と b_{k+1} が互いに素であることを説明して 5 点

(2)（配点 10 点）

- $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ のいずれかの 3 項間漸化式を立てて 3 点
- 数学的帰納法を用いる方針と $n=k$, $k+1$ での成立を仮定して 2 点
- 残りの証明に 5 点

第 3 問（20 点満点）

(1)（配点 8 点）

- ①②③にある石がすべて同色か，2 個または 1 個が黒石であるという 2 つの事象に分けられることを述べて 3 点
- 上記の遷移確率を求めて 3 点
- 漸化式の立式と一般項に 2 点(各 1 点)

(2)（配点 12 点）

- ①～⑤のすべてが同色の場合，4 個が同色の場合で 1 個が異なる場合，3 個が同色で 2 個が異なる場合の 3 つの場合に分けて漸化式を立てて 5 点
- n 回の試行後に①～⑤のすべてが同色である事象の確率を p_n としたとき，$\{p_n\}$ の漸化式を導いて 2 点
- 上記の $\{p_n\}$ の漸化式を n の偶奇で分けて解いて 3 点
- 答えに 2 点

第4問（20点満点）

- A(α), B(β)，およびzを$z=\cos\theta+i\sin\theta$で定めたとき，P, Q, Rをz, α, βで表して3点（各1点）
- $\omega=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$, $\overline{\omega}$を用いてP, Q, Rが正三角形をなす条件(②, ③の式)を記述できて3点
- ②が成り立つとき，$z=\omega$または$\alpha=\omega\beta$となることを導いて8点
- 上記で，$\alpha\neq\omega\beta$を示し，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$であることを述べて2点
- ③が成り立つとき，上記と同様の議論で$\theta=\dfrac{5}{3}\pi$を導いて4点

第5問（20点満点）

(1)（配点8点）

- 曲線$y=\log x$上の$x=k$, $x=k+1$である点における接線を求めて4点
- 不等式の残りの証明に4点

(2)（配点12点）

- $\dfrac{1}{2}\{\log k+\log(k+1)\}<\displaystyle\int_k^{k+1}\log x\,dx$を述べて2点
- 上記と(1)で示したことから$\displaystyle\int_k^{k+1}\log x\,dx$を上下から不等式で評価して2点
- $\displaystyle\int_{10}^{100}\log x\,dx$を上下から評価して2点
- $A=\displaystyle\sum_{k=10}^{99}\log k$としたとき，$A$を上下から評価して2点
- 残りの計算と答えに4点

第6問（20点満点）

(1)（配点10点）

- 数学的帰納法の方針のもと，部分積分から漸化式を導いて 6点
- 帰納法の仮定のもと，正しい証明ができて4点

(2)（配点10点）

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n\cdot{}_{2n}\mathrm{C}_n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x}{4-\sin^2 x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4}{4-\sin^2 x}\left(\frac{\sin x}{2}\right)^{2N+1}dx$を導いて5点
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x}{4-\sin^2 x}dx=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$を計算で求めて2点
- 残りの証明と結論を述べて3点